Un exemple de démarche mathématique

Cette séquence a pour but de présenter de façon synthétique, la structure et le développement historique d'un raisonnement mathématique.

Durée : 4 séances pour couvrir une période de plus de 2000 ans en réalité.

Partie 1 : poser le problème

Nous allons nous placer au temps de Platon (vers 400 avant notre ère) et ses condisciples grecs.
A cette époque, les seuls nombres connus sont les nombres entiers et les rationnels.

Il pose le problème suivant (appelé *duplication du carré*) à un de ses esclaves :

étant donné un carré de côté 1, construire un carré dont l'aire vaut le double.

L'Histoire dira que l'esclave s'est trompé mais a permis une découverte majeure à l'époque...
à vous de trouver laquelle !

bilan la semaine prochaine...

Un exemple de démarche mathématique

Cette séquence a pour but de présenter de façon synthétique, la structure et le développement historique d'un raisonnement mathématique.

Durée : 4 séances pour couvrir une période de plus de 2000 ans en réalité.

Partie 2 : observer et conjecturer

On va développer une méthode appelée ***dichotomie*** pour déterminer des encadrements de plus en plus fins de $\sqrt{2}$. En voici le schéma :

```
Entrées : deux nombres a et b tels que a = 1 et b = 2
début
    Faire (a + b)/2 = m;
    si m^2 < 2 alors
        on remplace a par m;
        et on repart à l'étape 1 ;
    sinon
        on remplace b par m;
        et on repart à l'étape 1;
fin
```

Algorithme 1 : méthode de recherche par dichotomie

1. A la main...

1. Comment justifier l'***encadrement*** : $\boxed{1 < \sqrt{2} < 2}$
2. Calculer sans machine $1,5^2$. En déduire un *meilleur* encadrement de $\sqrt{2}$.
3. Calculer sans machine $1,25^2$. En déduire un autre encadrement de $\sqrt{2}$.

2. A l'aide d'un outil informatique...

Cette partie est consacrée à la réalisation de l'algorithme de dichotomie à l'aide d'un tableur.
Les étapes suivantes doivent être scrupuleusement respectées.
Penser enfin à prendre régulièrement des notes sur la syntaxes, les problèmes rencontrés ou les remarques faîtes.

1. Dans les cellules **A1**, **B1**, **C1**, **D1** et **E1**, écrire les étiquettes *Etape*, a, b, $m = \dfrac{a+b}{2}$ et $m * m$.
2. Dans la cellule **A2**, on écrit le nombre 1, puis en **B2** et **C2**, les valeurs de départ de a et b.
3. Dans la cellule **D2**, on rentre la *formule* : **=(B2+C2)/2**. Que fait cette formule ? Quel en est le sens ?
4. Dans la cellule **E2**, on rentre la *formule* : **=D2*D2**. Que fait cette formule ? Quel en est le sens ?
5. Dans la cellule **A3**, écrire **=A2+1**.
6. Dans la cellule **B3**, entrer la formule **=SI(E2<2 ;D2 ;B2)**.
   Expliquer le sens et le résultat donné par cette formule.
7. Entrer ensuite les bonnes formules en **C3 D3 E3 A4 B4 C4 D4 et E4**.

8. Pour copier rapidement les formules manquantes dans les autres cellules des colonnes **A B C D E** :
   - ➤ Sélectionner avec la souris les cellules **A4 B4 C4 D4 E4** *(elle deviennent noires).*
   - ➤ Cliquer sur le petit carré noir en bas à droite des cinq cellules selectionnées, puis, sans relâcher, faire glisser le curseur vers le bas afin de couvrir les cellules necessaires.
9. Utiliser ce tableau pour déterminer un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude inférieure à 10^{-6}.
   En déduire les six premières décimales de $\sqrt{2}$. Combien d'étapes auront-été nécessaires ?

A ce stade, enregistrer dans un dossier nommé *dichotomie* et répondre aux questions suivantes.

Bilan :

- ➢ Cet algorithme a-t-il une fin ?
- ➢ Conjecturer la nature de $\sqrt{2}$.

la suite la semaine prochaine...

bilan la semaine prochaine...

Un exemple de démarche mathématique

Cette séquence a pour but de présenter de façon synthétique, la structure et le développement historique d'un raisonnement mathématique.

Durée : 4 séances pour couvrir une période de plus de 2000 ans en réalité.

Partie 3 : Démontrer

Cette partie est consacrée à la démonstration de la conjecture (en plus sophistiqué !) développée dans la partie précédente. Il faut donc dresser un bilan de ce qui a été fait et le synthétiser en une hypothèse sur $\sqrt{2}$.
Cette démonstration est basée sur des résultats d'arithmétique (c'est-à-dire liés aux seuls nombres entiers).

Rappels : un nombre entier a est *divisible* par un autre entier n s'il existe un entier q (penser à quotient) tel que $a = n \times q(+0)$ (c'est la division euclidienne !).

Un premier résultat

1. Rappeler la définition d'un nombre pair et impair (avec une phrase puis en algébrique).
2. Montrer que si un entier p est pair, alors p^2 est pair.
3. Montrer que si un entier i est impair, alors i^2 est impair.
4. En déduire que si n^2 est pair (resp. impair) alors n est pair (resp. impair).

Aide : supposer n^2 pair <u>et</u> n impair...

La démonstration historique

1. On va supposer dans ce qui suit qu'il existe deux entiers p et q <u>premiers entre eux</u> tel que : $\boxed{\sqrt{2} = \frac{p}{q}}$.
   (a) Quelle serait alors la nature de $\sqrt{2}$?
   (b) Si p et q sont premiers entre eux, que penser de $\frac{p}{q}$?
2. En "bidouillant" l'égalité encadrée, montrer que p^2 est pair. Que dire alors de p ?
3. Montrer alors que q^2 est pair ainsi que q.
4. Expliquer la <u>contradiction</u> avec une hypothèse du départ à préciser.

Bilan :

- Une telle démonstration est appelée démonstration *par l'absurde*.
- Quelle est la nature de $\sqrt{2}$?

bilan la semaine prochaine...

Bilan et synthèse de la séquence

Ce travail a pour but d'évaluer votre implication au cours des séances précédentes et votre capacité à dresser un bilan des objectifs recherchés, des difficultés rencontrées (dans l'Histoire ou en classe !), des techniques développées et de leur but.

1 Prise de notes

Mettre en ordre les notes prises au cours de la séquence.

2 Réflexion sur la séquence et techniques mathématiques développées

1. Quel était l'objet d'étude de cette séquence et son but ?
2. Quelles en ont été les différentes étapes ?
3. (a) Rédiger un paragraphe expliquant la méthode de dichotomie.
   (b) Pour quelle raison avons-nous développé cet "*algorithme*" ?
   (c) En considérant que $1 < \sqrt{3} < 2$, appliquer "*manuellement*" une dichotomie pour déterminer une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-1} près.
4. (a) Montrer que le carré d'un nombre impair est un nombre impair.
   (b) Quel a été le raisonnement utilisé dans la partie 3 de la séquence ?

   Aide : en expliquer les grandes lignes dans un paragraphe, sans détails techniques de calculs.