Option Sciences
au lycée Jules Guesde de Montpellier

Cristallographie

2007 / 2008

Mathématiques

MATH – FICHE I

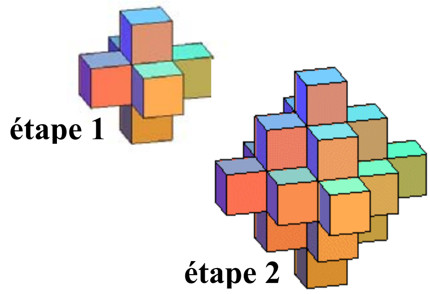
Les cristaux : étude d'un modèle

La cristallographie allait faire un grand pas en avant avec l'abbé **René Just Haüy** : l'histoire raconte que cette théorie fut élaborée à la suite de la chute d'un cristal de calcite qui se brisa en une ***multitude de rhomboèdres aux formes identiques***…

Étude 1 :

1° CLASSE ENTIÈRE : **construction d'un "cristal"** à partir de cubes, *à la manière de* l'abbé René-Just Haüy…

- Munissez vous de tous les cubes [de 4 cm d'arête] que vous aviez à construire…
- **Étape 0 :** prenez l'un de ces cubes ;
- **Étape 1 :** placez 6 cubes sur chacune des faces de ce cube (pris à l'étape 0) comme indiqué ci-contre ;
- **Étape 2 :** placez 18 autres cubes de façon à recouvrir toutes les faces des cubes placés à l'étape précédente comme indiqué ci-contre :
- Continuez ainsi de suite...



EN GROUPE :

2° Si on poursuit cette construction, quel "**polyèdre limite**" va-t-on ainsi obtenir ?

Examinez ensuite comment "matérialiser" ce polyèdre…

3° Indiquez le nombre total de cubes utilisés aux étapes 0, 1 et 2.

Combien de cubes faudra-t-il pour réaliser l'étape 3 ?

Généralisation : combien de cubes faudra-t-il pour réaliser l'**étape *n*** ?

☞ **Conseil :** vous pouvez fabriquer au fur et à mesure les cubes nécessaires… mais vous avez tout intérêt à trouver un procédé répétitif (on dit aussi "itératif") permettant de compter les cubes d'une étape à l'autre...

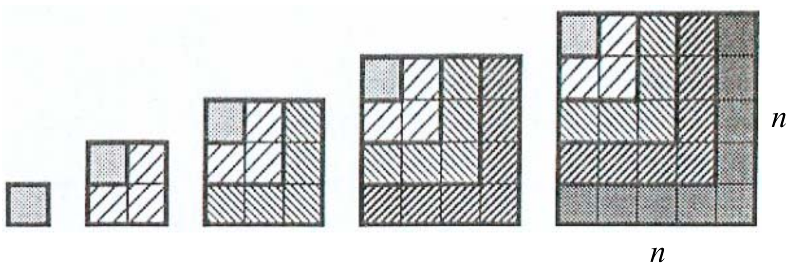
Selon le procédé utilisé, vous serez amenés à savoir additionner une suite de nombres impairs d'une longueur quelconque, c'est à dire savoir additionner une somme du type : $1+3+5+7+\cdots \quad \cdots+$

Questions préliminaires :

a) Quel est le 1^er^ nombre pair ? le 34^ème^ ? le 2007^ème^ ? le $n^{\text{ième}}$?

b) Mêmes questions pour les nombres impairs : quel est le 1^er^ nombre impair ? le 34^ème^ ? le 2007^ème^ ? le $n^{\text{ième}}$?

c) Observez maintenant les petits puzzles ci-contre et déduisez-en une propriété très intéressante concernant la somme I_n des n premiers nombres impairs !
(une fois conjecturée, vous admettrez cette propriété)



4° Pour l'**étape 0**, l'**étape 1,** l'**étape 2** et l'**étape 3** :

a) Calculez le volume du "**cristal**" ainsi que celui du "**polyèdre limite**", puis calculez sous forme d'un pourcentage (arrondi au centième le plus proche) la densité de l'empilement des cubes du "**cristal**" par rapport au volume du "**polyèdre limite**".

b) Calculez l'aire latérale du "**cristal**" (l'aire des faces visibles) ainsi que celle du "**polyèdre limite**", puis calculez sous forme d'un pourcentage (arrondi au centième le plus proche) le rapport de ces aires.

5° Généralisation :

a) Volume du "**cristal**" et volume du "**polyèdre limite**" à l'**étape** ***n*** : en vous aidant d'un tableur effectuez les calculs jusqu'à l'étape 50, puis jusqu'à l'étape 500, puis 1000, puis 10000… Quelle conjecture pouvez-vous faire concernant le volume du "**cristal**" par rapport au volume du "**polyèdre limite**" ?

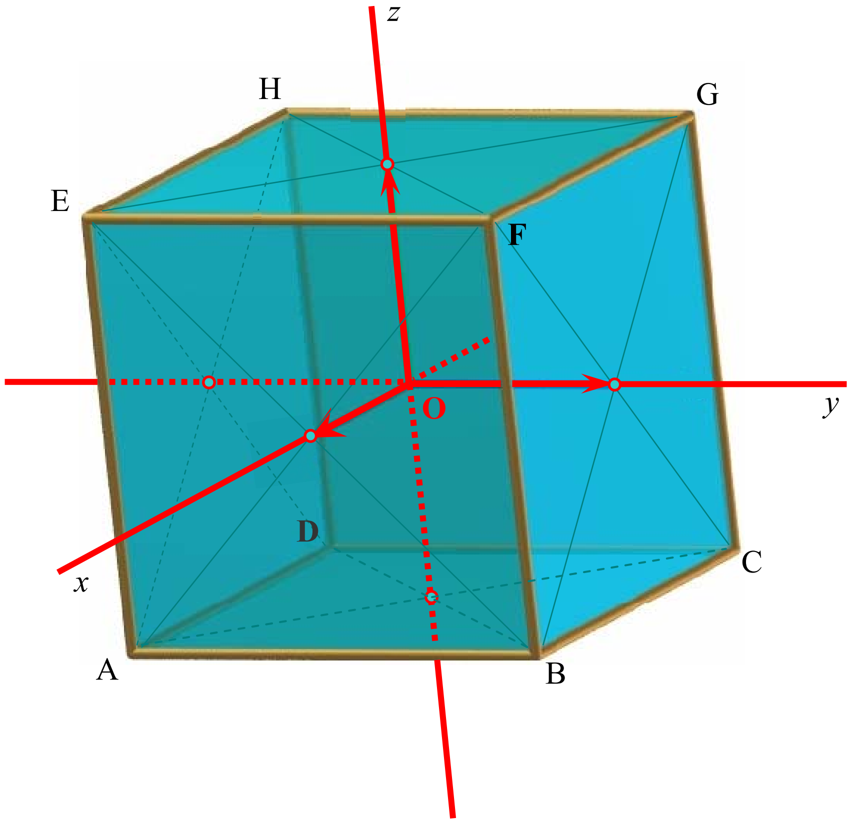
b) Aire latérale du "**cristal**" et aire du "**polyèdre limite**" : **commentez les résultats du 4°b) ;** par exemple, ont-ils été surprenants pour vous ? Ou encore faites-vous pour les aires une conjecture similaire à celles faite sur les volumes ? etc.

Complément : Construction du cristal de l'étape 1 avec GEOSPACE

Repérage dans l'espace :

Considérons un cube ABCDEFGH dont la longueur des arêtes est égal à 2 unités.

Pour effectuer un repérage dans l'espace il faut se donner une origine et trois direction distinctes deux à deux. Par exemple, prenons comme origine O le centre du cube et comme premier axe la droite (O*x*) passant par les centres des faces ABFE et DCGH (et donc perpendiculaire à ces faces), comme deuxième axe la droite (O*y*) passant par les centres des faces BCGF et ADHE (et donc perpendiculaire à ces faces) et comme troisième axe la droite (O*z*) passant par les centres des faces ABCD et EFGH (et donc perpendiculaire à ces faces). Prenons comme unité sur chacun de ces axes la moitié de la longueur d'une arête (autrement dit les arêtes de ce cube ont pour longueur 2 unités).



Question : un tel repère est dit *orthonormé*. **Pourquoi ?**

Un point est alors repéré par un triplet de nombres (a ; b ; c) qui sont qui sont ses coordonnées dans le repère (O ; (O*x*), (O*y*), (O*z*)).

Définitions :

- la 1$^{\text{ère}}$ coordonnée a est l'*abscisse* du point
- la 2$^{\text{ème}}$ coordonnée b est l'*ordonnée* du point
- la 3$^{\text{ème}}$ coordonnée c est la *cote* du point.

Questions :

1° Indiquez les coordonnées des sommets du cube.

2° Ouvrez le logiciel **Geospace** puis "*créez*" les 8 sommets en les définissant par leurs coordonnées.
[créer ↳ point ↳ point repéré ↳ dans l'espace].

3° Construire les 6 cubes permettant d'obtenir le cristal de l'étape 1…
[le bouton Symétrie par rapport à un plan devrait vous y aider…]

4° Trouvez comment faire apparaître le "**polyèdre limite**" à l'étape 1…

MATH – FICHE II

Tas d'oranges, cristaux et empilements de sphères

[D'après un article de Denis Auroux (CNRS - Ecole Polytechnique) / 18 septembre 2000]

➯ **Diaporama** (diapos n°22, 23 et 24)

Comment empiler efficacement des oranges (ou tout autre fruit sphérique) de façon à obtenir un tas occupant aussi peu de volume que possible? Est-il préférable d'empiler des couches où les fruits sont disposés en carrés, ou une disposition en triangles est-elle plus efficace? Ce problème, en apparence anodin, mais dont le champ d'application s'étend de **l'étude des cristaux** à la théorie des codages informatiques, aura donné du mal aux mathématiciens pendant près de quatre siècles : dès 1610, Kepler formulait une conjecture sur la question, mais il aura fallu attendre 1998 pour que les travaux de Thomas Hales en apportent la preuve de façon rigoureuse.

Exercice préliminaire

Dans un musée maritime, en guise de décoration devant des canons, on a construit deux pyramides à base carrée à l'aide de 55 boulets de canon chacune.

1° En considérant que ces boulets sont bien sphériques et sachant que leur diamètre vaut 12 cm, quelle peut bien être la hauteur de ces pyramides (au mm près) ?

2° En utilisant l'intégralité des 110 boulets, examinez s'il est possible d'obtenir :

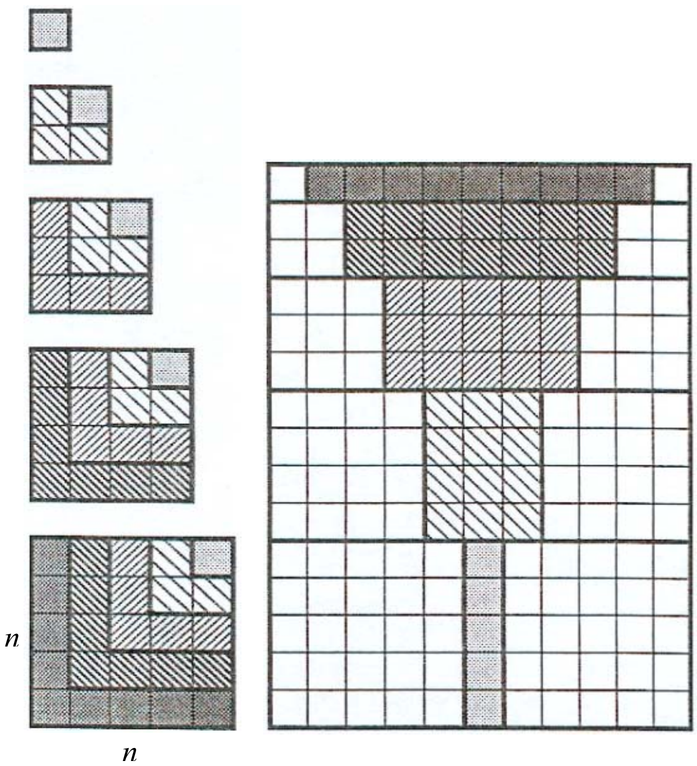
a) deux pyramides à base carrée de tailles différentes ;

b) trois pyramides à base carrée…

3° Nombre pyramidal : c'est un nombre qui est représenté par une pyramide dont la base est un polygone régulier. Ainsi 1, 5, 14, 55 et 91 sont des nombres pyramidaux à base carrée que l'on appellera plus simplement nombres pyramidaux carrés.

a) Déterminez les 15 premiers nombres pyramidaux carrés.

b) Établissez quelques propriétes de ces nombres…



c) Examinez à nouveau les puzzles de la fiche I ainsi que le nouveau puzzle ci-contre… ils devraient vous aider à déterminer une formule permettant de déterminer le $n$ième nombre pyramidal carré en fonction de n…

➯ *déterminez alors le* 2007$^{\text{ème}}$ ***nombre pyramidal carré***.

La densité d'un empilement de sphères

Le problème d'empilement peut être formulé mathématiquement de la façon suivante :

Quelle est la densité maximale d'un empilement de sphères pleines, toutes identiques, dans l'espace euclidien de dimension 3 ?

On définit la densité d'un empilement en considérant un cube dont le côté tend vers l'infini : c'est la proportion du volume à l'intérieur du cube occupée par les sphères. Plus précisément, la densité est la limite (supérieure) de cette proportion lorsque la taille du cube tend vers l'infini.

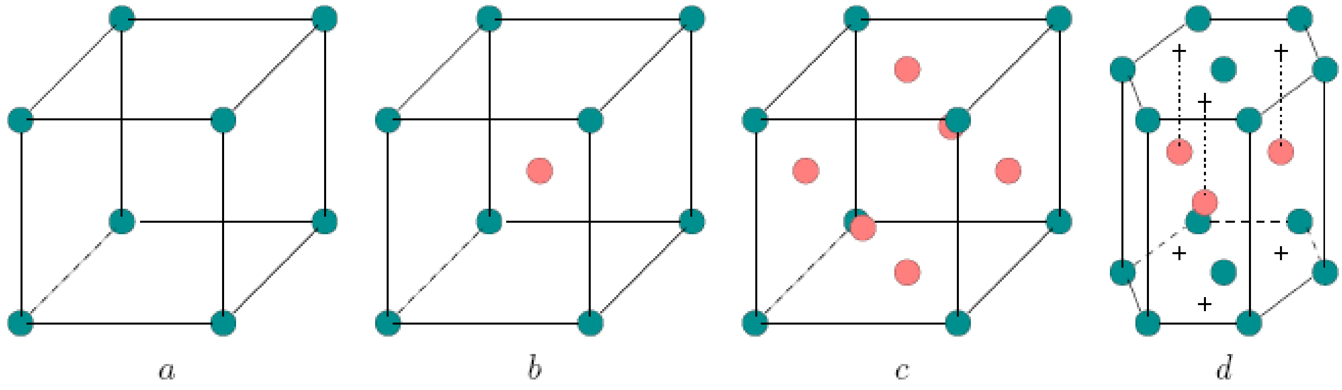


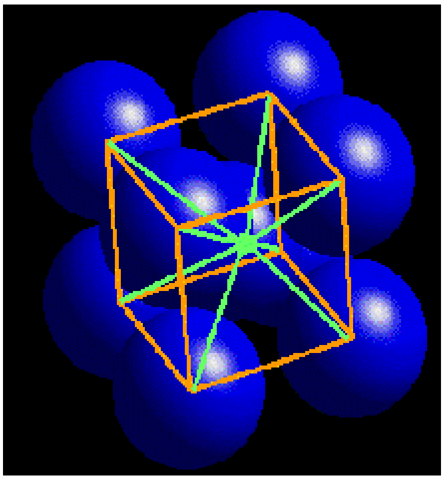
Figure 1 : empilements cubique simple (a), cubique centré (b), cubique à faces centrées (c), hexagonal compact (d).

La figure 1 ci-dessus montre certains empilements réguliers remarquables (dans un but de lisibilité, seuls les centres des sphères sont représentés : en fait les sphères voisines sont en contact; de même, seule une petite partie de l'espace est montrée, l'empilement étant obtenu en juxtaposant un nombre infini de tels motifs élémentaires). **Ces assemblages sont notamment ceux selon lesquels se disposent spontanément les atomes ou les molécules dans la plupart des cristaux.** Il est “facile” de calculer la densité de ces empilements.

Par exemple, l'assemblage *cubique simple*, dans lequel les sphères sont simplement empilées en couches successives disposées en carré (voir la figure 1a), a une densité égale à peine à 0,5 (un peu plus de la moitié de l'espace, seulement, est occupée par les sphères).

Question 1 : *dans le cas d'un* ***assemblage cubique simple*** *calculez la valeur exacte de ce rapport.*

La densité peut être grandement améliorée en espaçant légèrement les sphères de façon à pouvoir insérer une sphère supplémentaire au centre de chaque cube élémentaire de telle sorte que les sphères soient tangentes selon la diagonale principale du cube dont les sommets sont les centres des 8 sphères “extérieures”on obtient alors l'***assemblage cubique centré*** (figure 1b et ci-contre) :



Question 2 :

Calculez la densité de l'assemblage *cubique centré* réalisé ci-contre par rapport au cube dont les sommets sont les centres des 8 billes “extérieures”.

Indication :, il vous est possible de déterminer le côté de ce cube en fonction du rayon R d'une sphère. Ensuite “il vous reste” à déterminer le volume occupé par les sphères ***à l'intérieur de ce cube****…*

Une méthode encore plus efficace pour améliorer l'empilement consiste à insérer des sphères supplémentaires non plus au centre des cubes, mais au centre de chacune des faces des cubes d'un empilement cubique simple (figure 1c). L'assemblage ainsi obtenu est dit *cubique à faces centrées*, et sa densité vaut $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0{,}7405$.

Un autre empilement très dense est l'assemblage hexagonal compact, obtenu en empilant des couches de sphères disposées en hexagone, chaque couche étant décalée par rapport à ses voisines (voir figure 1d). La densité de cet empilement est $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0{,}7405$, la même que pour l'empilement cubique à faces centrées. Cette coïncidence n'est pas fortuite : en observant l'assemblage cubique à faces centrées de la figure 1c dans la direction d'une diagonale du cube, on peut voir qu'il est lui aussi composé d'un empilement de couches hexagonales (mais disposées différemment) ; nous y reviendrons plus loin.

La conjecture de Kepler

Les problèmes d'empilement ne se limitent pas au cas de l'espace tridimensionnel : par exemple, au lieu d'empiler des sphères dans l'espace, on peut vouloir empiler des disques dans le plan, ou encore "hypersphères" dans un espace de dimension 4 (ou supérieure) !

Ainsi, pour un empilement de disques dans le plan, il est bien connu depuis la nuit des temps que la meilleure disposition est l'assemblage hexagonal (figure 2), dont la densité est $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0{,}9069$. Toutefois, la preuve rigoureuse qu'il n'existe pas de meilleur empilement de disques n'a été obtenue qu'en 1910, par Thue.

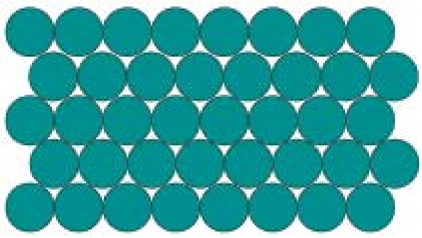


Figure 2 : assemblage hexagonal de disques dans le plan (densité $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0{,}9069$).

Dans le cas d'un empilement de sphères dans l'espace, Kepler a formulé en 1610 la conjecture suivante :

Conjecture (Kepler, 1610) : *La densité maximale d'un empilement de sphères en dimension 3 est* $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0{,}7405$*, c'est-à-dire la densité du réseau cubique à faces centrées.*

Après de nombreuses tentatives infructueuses, la conjecture de Kepler a enfin été démontrée par Thomas Hales en 1998.

On peut également s'intéresser au problème d'empilement fini, où il s'agit de remplir une boîte de forme donnée, plutôt que tout l'espace. Toutefois, la réponse à ce problème est inconnue sauf dans quelques cas très particuliers; par exemple, on sait que la densité du remplissage d'un parallélépipède donné est nécessairement inférieure à celle d'un empilement infini, mais on ne sait pas construire le remplissage optimal.

Math – Fiche I : Indications pour le professeur

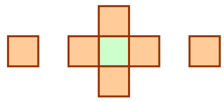
Les cristaux : étude d'un modèle

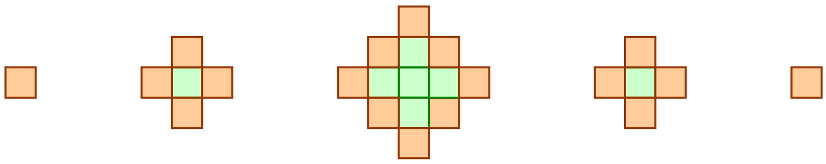
Le "**polyèdre limite**" est un octaèdre. Au centre des six cubes extrêmes, en plaçant un bâtonnet de 2cm de haut et en reliant le sommet de ces six bâtonnets on obtient un octaèdre "fil de fer".

↳ 7cubes.g3w

	Nombre de cubes	Différence
Étape 0	1	
Étape 1	7	+ 6
Étape 2	25	+18
Étape 3	63	+ 38

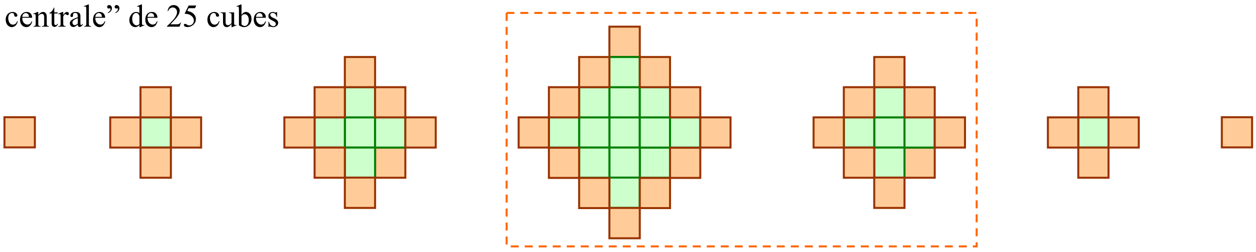
Exemple de stratégie "gagnante" en raisonnant par "tranches"… Ainsi :

- à l'**étape 0**, il n'y a qu'une tranche de 1 cube 
- à l'**étape 1**, il y a 3 tranches : deux de 1 cube et une "tranche centrale" de 5 cubes 
- à l'**étape 2**, il y a 5 tranches : deux de 1 cube, deux de 5 cubes et une "tranche centrale" de 13 cubes



1   1 + 3 + 1   1 + 3 + 5 + 3 + 1   1 + 3 + 1   1

- à l'**étape 3**, il y a 7 tranches : deux de 1 cube, deux de 5 cubes, deux de 13 cubes et une "tranche centrale" de 25 cubes



1   1 + 3 + 1   1 + 3 + 5 +3 + 1   1 + 3 + 5 + 7 + 5 + 3 + 1   1 + 3 + 5 + 3 + 1   1 + 3 + 1   1

Etc. avec deux tranches supplémentaires à chaque étape…

On peut donc remarquer qu'à chaque étape on rajoute la "tranche centrale" de l'étape précédente en plus d'une nouvelle "tranche centrale".

Des puzzles, on peut conjecturer, et on l'admettra, que la la somme I_n des n premiers entiers impairs est égale à : $\mathrm{I}_n = 1+3+5+\cdots \quad \cdots+2n+1 = n^2$

On a donc :

$$\mathrm{N}_0 = 1$$

$$\mathrm{N}_1 = 2 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_1 = 2 + 2^2 + 1 = 7$$

$$\mathrm{N}_2 = \mathrm{N}_1 + \left(\mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_1\right) + \left(\mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_2\right) = 7 + \left(2^2 + 1\right) + \left(3^2 + 2^2\right) = 25$$

$$\mathrm{N}_3 = \mathrm{N}_2 + \left(\mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_2\right) + \left(\mathrm{I}_4 + \mathrm{I}_3\right) = 25 + \left(3^2 + 2^2\right) + \left(4^2 + 3^2\right) = 25 + 13 + 25 = 63$$

… / …

$$\mathrm{N}_n = \mathrm{N}_{n-1} + \left(\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n-1}\right) + \left(\mathrm{I}_{n+1} + \mathrm{I}_n\right) = \mathrm{N}_{n-1} + \left(n^2 + (n-1)^2\right) + \left((n+1)^2 + n^2\right) = \mathrm{N}_{n-1} + 4n^2 + 2$$

On s'arrêtera là avec les élèves…

Pour le fun… :

$$\begin{array}{l}
\mathrm{N}_n = \cancel{\mathrm{N}_{n-1}} + 4n^2 + 2 \\
\cancel{\mathrm{N}_{n-1}} = \cancel{\mathrm{N}_{n-2}} + 4(n-1)^2 + 2 \\
\cancel{\cdots} = \cdots + \cdots + 2 \\
\\
\cdots = \cancel{\cdots} + \cdots + 2 \\
\cancel{\mathrm{N}_2} = \cancel{\mathrm{N}_1} + 4 \times 2^2 + 2 \\
\cancel{\mathrm{N}_1} = 1 + 4 \times 1^2 + 2 \\
\hline
\mathrm{N}_n = 1 + 4 \times \left(1^2 + 2^2 + \cdots \quad \cdots + (n-1)^2 + n^2\right) + n \times 2
\end{array}$$

$$\mathrm{N}_n = 1 + 4 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2n = \frac{3(2n+1) + 2n(n+1)(2n+1)}{3} = \frac{(2n+1)\left[3 + 2n(n+1)\right]}{3}$$

On a donc : $\mathrm{N}_n = \dfrac{(2n+1)\left(2n^2 + 2n + 3\right)}{3}$

Construction du cristal de l'étape 1 avec GEOSPACE

L'origine O du repère étant le centre du premier cube, d'arête $2a$, ses sommets ont pour coordonnées :

- A(1, −1, −1), B(1, 1 −1), C(−1, 1, −1), D(−1, −1, −1) pour les sommets du "dessous",
- E(1, −1, 1), F(1, 1, 1), G(−1, 1, 1), H(−1, −1, 1) pour les sommets "du dessus"...

Ensuite on construit les 6 cubes en faisant des symétries par rapport aux faces du cube initial (Symétrie par rapport à un plan) ce qui devrait être à la portée des élèves si on les "épaule" un peu (la difficulté étant de devoir créer la transformation avant de pouvoir l'utiliser)… puis ils auront à déterminer les coordonnées des centres des faces des 6 cubes visibles puis celles du sommet de chaque bâtonnet, etc.

Cela nous a semblé une bonne motivation pour travailler des coordonnées dans l'espace.

Ensuite on fait tracer le "**polyèdre limite**" (c'est à dire l'**octaèdre**)...

Pour faire apparaître un à un les cubes et les bâtonnets :

☞ appuyer sur la touche C qui fera apparaître les 6 cubes l'un après l'autre ;

☞ appuyer sur la touche P pour faire apparaître les bâtonnets puis l'octaèdre.

Construction du cristal de l'étape 1 avec CABRI 3D

L'origine O du repère étant le centre du premier cube, d'arête $2a$, ses sommets ont pour coordonnées :

- A(1, −1, −1), B(1, 1 −1), C(−1, 1, −1), D(−1, −1, −1) pour les sommets du "dessous",
- E(1, −1, 1), F(1, 1, 1), G(−1, 1, 1), H(−1, −1, 1) pour les sommets "du dessus"...

Cabri 3D construit un cube en "le posant" sur un plan, puis en définissant dans ce plan le centre I de la face du cube (un carré) et enfin en plaçant un sommet en dehors de ce plan. Pour que le cube soit centré en O, on choisit I(0 ; 0 ; −1), puis on trace le plan parallèle au plan d'origine passant par I (il a pour équation $z = -1$) et enfin on place le sommet B(1, 1 −1).

Ensuite on construit les 6 cubes en faisant des symétries par rapport aux faces du cube initial (CABRI 3D "pose" directement le nouveau cube sur une des faces du premier). Puis on trace les milieux de chacune des 6 faces des cubes extérieurs, on trace chacun des sommets de chaque bâtonnet (sur l'axe reliant deux milieux opposée, à 2cm d'un sommet).

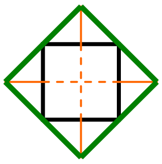
Cela nous a semblé une bonne motivation pour travailler des coordonnées dans l'espace.

Ensuite on fait tracer le "**polyèdre limite**" (c'est à dire l'**octaèdre**)...

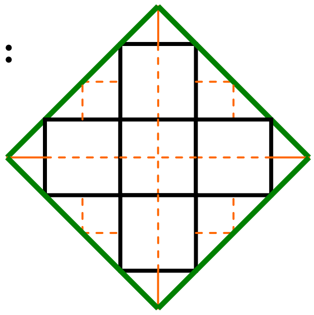
Aire du cristal et de l'octaèdre

Vue en coupe (ou vue de dessus) du cristal et de l'octaèdre associé :

À l'étape 0 :



À l'étape 1 :



Si a représente la longueur des arêtes d'un cube, alors les arêtes de l'octaèdre à l'étape n ont pour longueur $(n+1)a\sqrt{2}$.

Toutes les faces de l'octaèdre sont des triangles équilatéraux d'aire $Ao_n = \frac{1}{2}(n+1)a\sqrt{2} \times \left((n+1)a\sqrt{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = (n+1)^2 a^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$ et donc l'aire de l'octaèdre est égale à $4(n+1)^2 a^2 \sqrt{3}$. ☞ Avec $a = 4$: $Ao_n = 4^3 (n+1)^2 \sqrt{3} = 64(n+1)^2\sqrt{3}$

L'aire du cristal est égale à 6 fois l'aire de la tranche centrale constituée de T_n carrés de côté a, avec $T_n = I_{n+1} + I_n = (n+1)^2 + n^2 = 2n^2 + 2n + 1$, d'où laire du cristal à l'étape n : $Ac_n = 6\left(2n^2 + 2n + 1\right)a^2$. ☞ Avec $a = 4$: $Ac_n = 96\left(2n^2 + 2n + 1\right)$

n	Nombre de cubes	Aire du cristal en cm^2	arête de l'octaèdre en cm	Aire de l'octaèdre en cm^2	Ac_n / Ao_n
0	**1**	$Ac_0 = 6a^2 = 96$	$a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$	$Ao_0 = 64\sqrt{3}$ $\approx 110{,}85$	$\approx 0{,}87$
1	**7**	$Ac_1 = 30a^3 = 480$	$2a\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$	$Ao_1 = 16a^3\sqrt{3} = 256\sqrt{3}$ $\approx 443{,}41$	$\approx 1{,}08$
2	**25**	$Ac_2 = 78a^2 = 1248$	$3a\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$	$Ao_2 = 36a^2\sqrt{3} = 576\sqrt{3}$ $\approx 997{,}66$	$\approx 1{,}25$
3	**63**	$Ac_3 = 150a^2 = 2400$	$4a\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$	$Ao_3 = 64a^2\sqrt{3} = 1024\sqrt{3}$ $\approx 1773{,}62$	$\approx 1{,}35$
4	**129**	$Ac_4 = 246a^3 = 3936$	$5a\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$	$Ao_4 = 100a^2\sqrt{3} = 1600\sqrt{3}$ $\approx 2771{,}28$	$\approx 1{,}42$

$$Ac_n / Ao_n = \frac{96\left(2n^2+2n+1\right)}{64(n+1)^2\sqrt{3}} = \frac{192n^2 + 192n + 96}{64n^2\sqrt{3} + 128n\sqrt{3} + 64\sqrt{3}}$$

$$\text{D'où : } \lim_{n\to+\infty} Ac_n / Ao_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{192n^2}{64n^2\sqrt{3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \approx 1{,}732$$

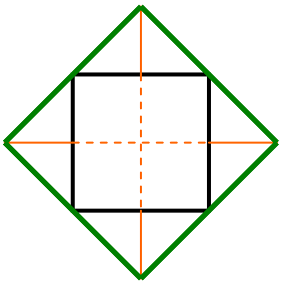
L'aire du cristal tend donc à devenir environ égale aux 7/4 de celle de l'octaèdre.

[L'aire de l'octaèdre tend à devenir environ égale 4/7 ou encore à un peu plus de la moitié de celle du cristal]

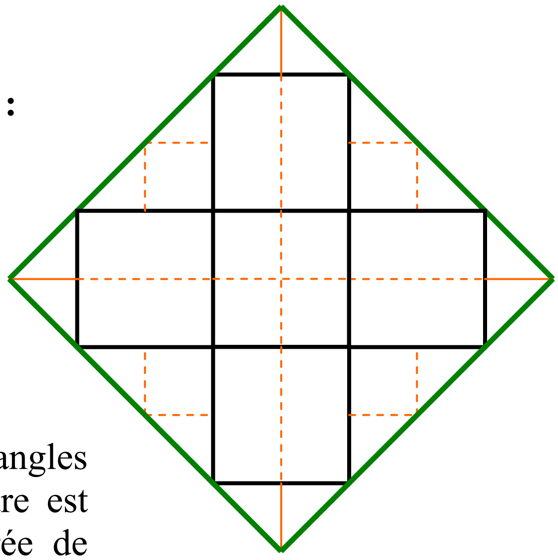
Volume du cristal et de l'octaèdre

Vue en coupe (ou vue de dessus) du cristal et de l'octaèdre associé :

À l'étape 0 :



À l'étape 1 :



Si a représente la longueur des arêtes d'un cube, alors les arêtes de l'octaèdre à l'étape n ont pour longueur $(n+1)a\sqrt{2}$.

Toutes les faces de l'octaèdre sont des triangles équilatéraux et on peut considérer que l'octaèdre est donc composé de deux pyramides à base carrée de hauteur égale à $(n+1)\times a$.

D'où le volume de l'octaèdre à l'étape n : $Vo_n = 2\times\frac{1}{3}\left((n+1)a\sqrt{2}\right)^3\times(n+1)a = \frac{4}{3}(n+1)^3a^3$

↳ avec $a=4$: $Vo_n = \frac{4^4}{3}(n+1)^3 = \frac{256}{3}(n+1)^3$

Remarque :

Le volume d'un octaèdre régulier est égal à $\frac{\sqrt{2}}{3}\times c^3$ où c est la longueur de ses arêtes.

On a bien ici : $\frac{\sqrt{2}}{3}\times c^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\times\left((n+1)a\sqrt{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\times(n+1)^3a^3\times2\sqrt{2} = \frac{4}{3}(n+1)^3a^3\ldots$

n	Nombre de cubes	Volume du cristal en cm^3	arête de l'octaèdre en cm	Volume de l'octaèdre en cm^3	Vc_n / Vo_n
0	**1**	$Vc_0 = a^3 = 4^3 = 64$	$a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$	$Vo_0 = \frac{4}{3}a^3$ $\approx 85,333$	$\frac{3}{4} = 0,75$
1	**7**	$Vc_1 = 7a^3 = 448$	$2a\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$	$Vo_1 = \frac{32}{3}a^3$ $\approx 682,667$	$\frac{21}{32} = 0,65625$
2	**25**	$Vc_2 = 25a^3 = 1600$	$3a\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$	$Vo_2 = 36a^3$ $= 2304$	$\frac{25}{36} \approx 0,694$
3	**63**	$Vc_3 = 63a^3 = 4032$	$4a\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$	$Vo_3 = \frac{256}{3}a^3$ $\approx 5461,333$	$\frac{189}{256} \approx 0,738$
4	**129**	$Vc_4 = 129a^3 = 8256$	$5a\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$	$Vo_3 = \frac{500}{3}a^3$ $\approx 10666,667$	$\frac{387}{500} = 0,774$

En utilisant un tableur (page suivante), on peut facilement conjecturer que le volume du cristal tend donc à devenir égal à celui de l'octaèdre.

Arête du cube : 4

n	Nbre de cubes	Volume du cristal	Volume de l'octaèdre	Vc/Vo en %
0	1	64	85,33333333	75,00
1	7	448	682,6666667	65,63
2	25	1600	2304	69,44
3	63	4032	5461,333333	73,83
4	129	8256	10666,66667	77,40
5	231	14784	18432	80,21
6	377	24128	29269,33333	82,43
7	575	36800	43690,66667	84,23
8	833	53312	62208	85,70
9	1159	74176	85333,33333	86,93
10	1561	99904	113578,6667	87,96
11	2047	131008	147456	88,85
12	2625	168000	187477,3333	89,61
13	3303	211392	234154,6667	90,28
14	4089	261696	288000	90,87
15	4991	319424	349525,3333	91,39
16	6017	385088	419242,6667	91,85
17	7175	459200	497664	92,27
18	8473	542272	585301,3333	92,65
19	9919	634816	682666,6667	92,99
20	11521	737344	790272	93,30
21	13287	850368	908629,3333	93,59
22	15225	974400	1038250,667	93,85
23	17343	1109952	1179648	94,09
24	19649	1257536	1333333,333	94,32
25	22151	1417664	1499818,667	94,52
26	24857	1590848	1679616	94,71
27	27775	1777600	1873237,333	94,89
28	30913	1978432	2081194,667	95,06
29	34279	2193856	2304000	95,22
30	37881	2424384	2542165,333	95,37
31	41727	2670528	2796202,667	95,51
32	45825	2932800	3066624	95,64
33	50183	3211712	3353941,333	95,76
34	54809	3507776	3658666,667	95,88
35	59711	3821504	3981312	95,99
36	64897	4153408	4322389,333	96,09
37	70375	4504000	4682410,667	96,19
38	76153	4873792	5061888	96,28
39	82239	5263296	5461333,333	96,37
40	88641	5673024	5881258,667	96,46
41	95367	6103488	6322176	96,54
42	102425	6555200	6784597,333	96,62
43	109823	7028672	7269034,667	96,69
44	117569	7524416	7776000	96,76
45	125671	8042944	8306005,333	96,83
46	134137	8584768	8859562,667	96,90
47	142975	9150400	9437184	96,96
48	152193	9740352	10039381,33	97,02
49	161799	10355136	10666666,67	97,08
50	171801	10995264	11319552	97,14
500	**167168001**	**10698752064**	**10730794752**	**99,70**
1000	**1335336001**	**85461504064**	**85589589419**	**99,85**
10000	**1,33353E+12**	**8,53461E+13**	**8,53589E+13**	**99,99**

Math – Fiche II : Indications pour le professeur

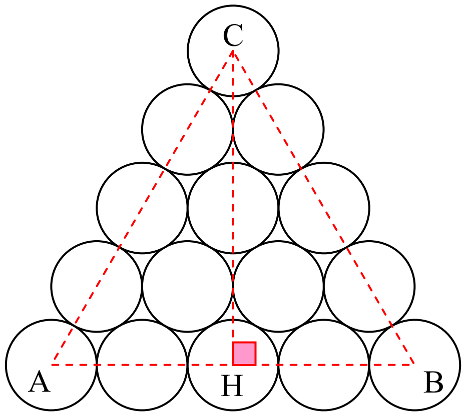
Tas d'oranges, cristaux et empilements de sphères

Exercice préliminaire

Étape 1 : 1 bille et la hauteur de la pyramide vaut 12 cm.

Étape 2 : 1 + 2² = 5 billes et $\ell_2 = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ et $(h_2)^2 = (6\sqrt{3})^2 - 6^2 = 72 = 36 \times 2$, d'où $h_2 = 6\sqrt{2}$; la hauteur de la pyramide est donc $H_2 = 6\sqrt{2} + 12$ soit environ 20,49 cm.

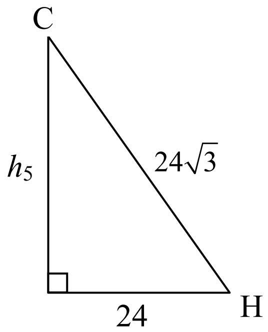
1° 55 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 ; la base de la pyramide est donc constituée de 25 boulets et a 5 “étages” avec 4 ***faces latérales*** comme ci-contre…



Considérons le triangle ABC obtenu en joignant les centres des boulets aux “extrémités” : ce triangle est équilatéral de côté 4 diamètres c'est-à-dire 48 cm et donc la hauteur CH vaut :

$$\ell_5 = \frac{48\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3} \text{ cm}$$

Considérons maintenant la pyramide en coupe comme ci-dessous (le plan de coupe est le plan perpendiculaire à la base passant par les points C et H) :



On a : $(h_5)^2 = (24\sqrt{3})^2 - 24^2 = 1728 - 576 = 1152 = 3^2 \times 8^2 \times 2$,

d'où : $h_5 = 24\sqrt{2}$; la hauteur de la pyramide vaut donc $H_5 = 24\sqrt{2} + 12$ c'est-à-dire environ 45,94 cm.

Au rang n, on aura :

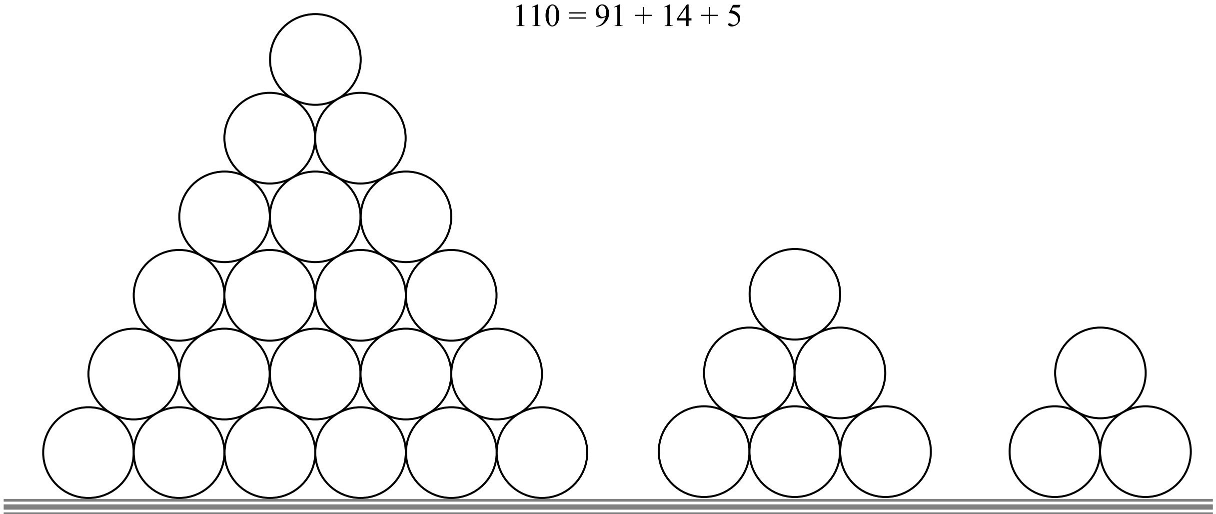
$\ell_n = (n-1) \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6(n-1)\sqrt{3}$

$(h_n)^2 = \left(6(n-1)\sqrt{3}\right)^2 - \left(6(n-1)\right)^2 = \left(6(n-1)\right)^2 \times 2$ et donc la hauteur de la pyramide est $H_n = 6(n-1)\sqrt{2} + 12$

2° a) En utilisant l'intégralité des 110 boulets, il n'est pas possible d'obtenir deux pyramides à base carrée de tailles différentes ; en effet : 36 + 55 = 91 mais 110 – 91 = 19 et il n'existe pas de pyramide à base carrée utilisant 19 boulets…

b) Par contre il est possible d'obtenir trois pyramides à base carrée de tailles différentes car :

110 = 91 + 14 + 5

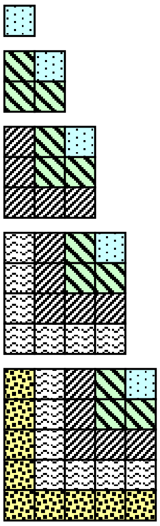


91 boulets [36+25+16+9+4+1] | 14 boulets [9+4+1] | 5 boulets [4+1]

3° Nombres pyramidaux :

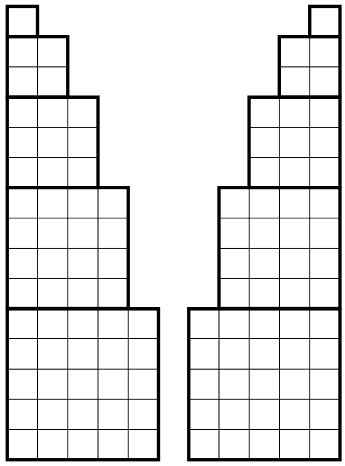
a) 1, 5, 14, **30**, 55, 91, 140, 204, 285, 385, 506, 650, 819, 1015 et 1240.

b) Le $n^{\text{ième}}$ nombre pyramidal carré est égal au cumul des carrés des n premiers entiers, c'est à dire à la somme des carrés des n premiers entiers successifs (autre que 0) ; par exemple : $30 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16$



c) Le $n^{\text{ième}}$ de ces nombres est égal à son prédécesseur, le $(n-1)^{\text{ième}}$, plus le carré du $n^{\text{ième}}$ nombre entier non nul ; par exemple, le $4^{\text{ème}}$ de ces nombres est 30 et on a bien : $30 = 14 + 4^2 = 14 + 16$.

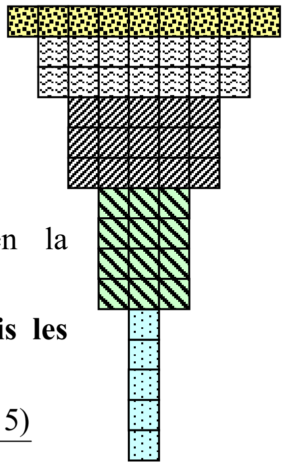
$\text{Pycar}_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

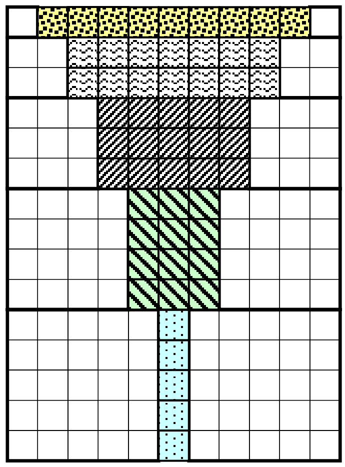


Clé pour comprendre le puzzle et sans doute donner un coup de main aux élèves qui n'auraient pas une aussi "bonne vue" que l'auteur du puzzle…

Les 5 carrés en couleur sur le côté se retrouvent à deux endroits, tels quels, dans le rectangle : "colonne" de droite et "colonne" de gauche (cf. ci-contre).

On les retrouve encore une fois "colonne centrale", en effet avec ces 5 carrés on a : 1 fois 9,
2 fois 7,
3 fois 5,
4 fois 3,
5 fois 1





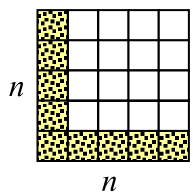
En les empilant ainsi, on obtient bien la "pyramide centrale (cf. ci-contre)…

Le rectangle est donc constitué de 3 fois les carrés sur le côté et donc on a :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \frac{(9+2)\times(1+2+3+4+5)}{3}$$
$$= \frac{11\times 15}{3} = 55$$

Et ce procédé est parfaitement généralisable :

Avec n carrés, le dernier ayant comme côté n, les carrés en couleur représenteront le nombre impair $n + n - 1$, c'est-à-dire $2n - 1$, le rang supérieur représentant $2n - 3$, etc. et on aura : 1 fois $2n - 1$,
2 fois $(2n - 3)$,
--- / ---
$(n - 2)$ fois 5,
$(n - 1)$ fois 3,
n fois 1



d'où :

$$1^2+2^2+3^2+\ \cdots\ +n^2=\frac{(2n-1+2)\times(1+2+3+\cdots+n)}{3}=\frac{(2n+1)\times\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)}{3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

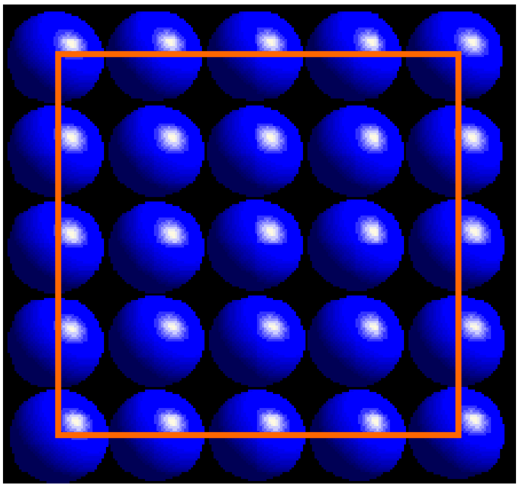
↳ vérification pour $n = 1$, $n = 2$, etc.

Et pour $n=2007$, **Pycar$_{2007}$** $=\dfrac{2007\times2008\times4015}{6}=2\,696\,779\,140$.

Densité d'un empilement de sphères :

Question 1 : *cas d'un **assemblage cubique simple***

Considérons un cube dont les sommets sont les centres des n^3 billes de même rayon R disposées en n "couches" identiques comme ci-contre. Ce cube a donc pour longueur de côté $(n-1)\times2R$. D'où :



☞ **Volume du cube :** $C=\left((n-1)\times2R\right)^3=(n-1)^3\times8R^3$

☞ **Nombre de billes à l'intérieur du cube :**

Il y a $(n-2)^3$ billes complètement *à l'intérieur* du cube.

Il y a 8 billes *aux sommets* dont seulement un huitième est à l'intérieur du cube (cf. démonstration à la question **2**), ce fait l'équivalent d'une bille.

Sur chacune des 12 *arêtes* il "reste" donc $n-2$ billes, dont seulement un quart est à l'intérieur du cube (cf. dém. à la question **2**), ce fait l'équivalent de $3\times(n-2)$ billes.

Sur chacune des 6 *faces* il "reste" encore $(n-2)^2$ billes, dont seulement la moitié est à l'intérieur du cube (cf. démonstration à la question **2**), ce fait l'équivalent de $3\times(n-2)^2$ billes.

Le nombre total de billes à l'intérieur du cube est donc égal à :

$(n-2)^3+3\times(n-2)^2+3\times(n-2)+1=\left((n-2)+1\right)^3$ $\left[(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+1\right]$ et donc il y a bien $(n-1)^3$ billes à l'intérieur du cube.

☞ **Volume des $(n-1)^3$ billes :** $B=\left(n-1\right)^3\times\frac{4}{3}\pi R^3$

D'où la densité cherchée : $d=\dfrac{B}{C}=\dfrac{\left(n-1\right)^3\times\frac{4}{3}\pi R^3}{\left(n-1\right)^3\times8R^3}=\dfrac{4}{3}\pi\times\dfrac{1}{8}=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$, soit $d\approx$ **0,5236...**

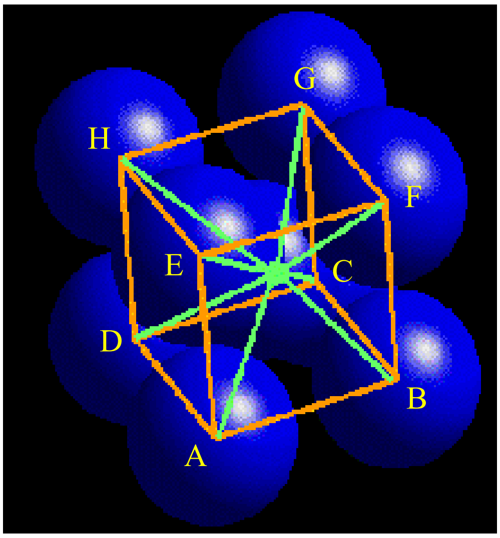
Remarque1 : c'est la densité que l'on trouve à partir du cube "élémentaire" ayant une bille à chacun de ses sommets, c'est-à-dire l'équivalent d'une bille à l'intérieur du cube de côté R .

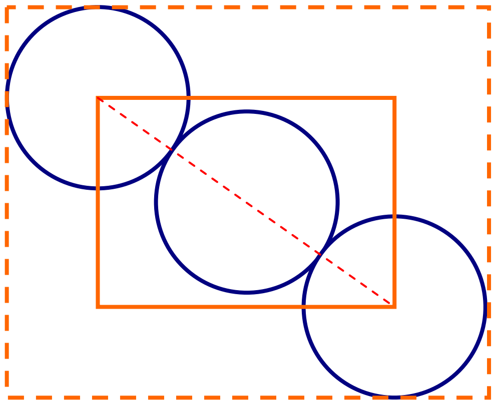
La densité est bien égale à : $d=\dfrac{B}{C}=\dfrac{\frac{4}{3}\pi R^3}{8R^3}=\dfrac{4}{3}\pi\times\dfrac{1}{8}=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$

Remarque2 : on obtient donc la même densité que si l'on avait considéré n^3 billes dans le cube de côté $n \times 2R$ les contenant entièrement, c'est-à-dire de volume $(n \times 2R)^3 = n^3 \times 8R^3$ …

$$d = \frac{B}{C} = \frac{n^3 \times \frac{4}{3}\pi R^3}{n^3 \times 8R^3} = \frac{4}{3}\pi \times \frac{1}{8} = \boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$$

Question 2 : *cas d'un* ***assemblage cubique centré***





Le cube a pour "grande diagonale" : $D = R + 2R + R = 4R$.
Si a est la longueur des côtés du cube on a $D = a\sqrt{3}$, d'où :

$$a = \frac{4R}{\sqrt{3}}.$$

Considérons la sphère (ou bille) centrée au sommet F :

- ☞ le plan EFGH sépare cette sphère en deux demi-sphères et donc la moitié "supérieure" de cette sphère n'est pas dans le cube (la moitié qui est "au-dessus" du plan EFGH sur ce dessin) ;
- ☞ le plan BCGFsépare la moitié "inférieure" de cette sphère en deux quarts de sphère et donc un quart de plus de cette sphère n'est pas dans le cube (le quart qui se trouve "à droite" du plan BCFG sur ce dessin) ; il ne reste plus qu'un quart de la sphère dans le cube.
- ☞ enfin, le plan ABFE sépare le quart restant de cette sphère en deux huitièmes de sphère et donc un huitième de plus de cette sphère n'est pas dans le cube (le huitième et qui se trouve "devant " le plan ABFE sur ce dessin).
- ☞ CABRI 3D permet de bien visualiser les coupes de la sphère par les différents plans.

Il n'y a donc qu'un huitième des sphères centrées aux sommets qui se trouve dans le cube et il y a donc l'équivalent de $8 \times \frac{1}{8} + 1 = 2$ sphères à l'intérieur du cube, d'où la densité :

$$d = \frac{2 \times \frac{4}{3}\pi R^3}{\left(\frac{4R}{\sqrt{3}}\right)^3} = \frac{8}{3}\pi R^3 \times \frac{3\sqrt{3}}{4 \times 16 R^3} = \boldsymbol{\frac{\pi\sqrt{3}}{8} \approx 0{,}6802...}$$