Concours général des lycées - Session 2002

Dans tout le problème, un triangle ABC est la figure déterminée par les trois points A, B, C supposés non alignés. Conformément à la tradition, les longueurs de ses côtés seront notées $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$, et $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont les mesures en radians, comprises entre 0 et π, de ses angles.

Les trois premières parties se déroulent dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ associé aux coordonnées (x, y) (ou (X, Y)).

1 Première partie

Soit ABC un triangle. On note P le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) et D le symétrique du point C par rapport à la droite (AP).

On dit que ce triangle est *pseudo-rectangle* en A si $|\widehat{B} - \widehat{C}| = \frac{\pi}{2}$.
On précise qu'il est *pseudo-rectangle en A, obtus en B* dans le cas où $\widehat{B} - \widehat{C} = \frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que le triangle ABC est pseudo-rectangle en A si et seulement si le triangle ABD est rectangle en A.
2. Montrer que $PA^2 = PB.PC$ si et seulement si le triangle ABC est rectangle en A ou pseudo-rectangle en A.
3. Montrer que le triangle ABC est pseudo-rectangle en A si et seulement si son orthocentre est le symétrique du point A par rapport à la droite (BC).
4. Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que $PB + PC = 2R$ si et seulement si ABC est rectangle en A ou pseudo-rectangle en A.
5. Montrer que le triangle ABC est pseudo-rectangle en A si et seulement si la droite (AP) est tangente au cercle circonscrit au triangle ABC.
6. Dans le plan complexe associé au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on note α, β, γ les affixes des points non alignés A, B, C.

   a. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}{(\beta-\gamma)^2}$ pour que le triangle ABC soit pseudo-rectangle en A.

   b. On suppose $\beta = -\gamma = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$. Déterminer l'ensemble (E_1) des points A du plan tels que le triangle ABC soit pseudo-rectangle en A.

   c. On suppose $\beta = -\gamma = 1$. Déterminer l'ensemble (E_2) des points A du plan tels que le triangle ABC soit pseudo-rectangle en A.

   d. Par quelle transformation géométrique simple passe-t-on de (E_2) à (E_1) ?

2 Deuxième partie

1. Soit (a, b, c) un triplet de réels strictement positifs. Établir l'équivalence des conditions suivantes :

   i. il existe un triangle ABC pseudo-rectangle en A et obtus en B tel que $AB = c, BC = a$ et $CA = b$;

   ii. $b^2 - c^2 = a\sqrt{b^2 + c^2}$;

   iii. il existe deux réels ρ et θ vérifiant $\rho > 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ et $a = \rho\cos 2\theta, b = \rho\cos\theta$ et $c = \rho\sin\theta$.

   Ces conditions étant réalisées, montrer que θ mesure l'un des angles du triangle ABC. Comment peut-on interpréter géométriquement ρ ?
2. Soit ABC un triangle pseudo-rectangle en A, obtus en B et dont les longueurs des côtés sont des nombres rationnels ; soit ρ et θ les deux réels définis au **1.iii.**
   Dans cette question, on pourra utiliser sans justification les formules trigonométriques suivantes vérifiées par tout réel φ pour lequel $\tan\varphi$ est définie :

   $$\cos 2\varphi = \frac{1 - \tan^2\varphi}{1 + \tan^2\varphi}, \quad \sin 2\varphi = \frac{2\tan\varphi}{1 + \tan^2\varphi}$$

   a. Montrer que ρ est rationnel et en déduire que $\tan\frac{\theta}{2}$ est rationnel. Soient p et q les entiers strictement positifs et premiers entre eux tels que $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{p}{q}$.

   b. Vérifier que $0 < p < q(\sqrt{2} - 1)$ et établir l'existence d'un rationnel strictement positif r tel que :

   $$\begin{aligned} a &= r\left(p^4 - 6p^2q^2 + q^4\right) \\ b &= r\left(q^4 - p^4\right) \\ c &= 2pqr\left(p^2 + q^2\right) \end{aligned}$$
3. Montrer réciproquement que les formules du **2.b.** définissent les longueurs des côtés d'un triangle pseudo-rectangle en A, obtus en B et dont les longueurs des côtés sont rationnelles.
4. **a.** Soient p et q deux entiers strictement positifs premiers entre eux. Déterminer le plus grand diviseur commun aux trois entiers $p^4 - 6p^2q^2 + q^4$, $q^4 - p^4$, $2pq\left(p^2 + q^2\right)$ (on discutera suivant la parité de p et q).

   b. Décrire les triplets d'entiers (a, b, c) tels qu'il existe un triangle ABC, pseudo-rectangle en A obtus en B, tel que $AB = c$, $BC = a$ et $CA = b$.
5. Résoudre dans $\mathbb{N}^*$ l'équation $x^2\left(y^2 + z^2\right) = \left(y^2 - z^2\right)^2$.
6. Résoudre dans $\mathbb{Q}^*$ l'équation $x^2\left(y^2 + z^2\right) = \left(y^2 - z^2\right)^2$.
7. Résoudre dans $\mathbb{N}^*$ l'équation $x^2\left(y^2 - z^2\right)^2 = \left(y^2 + z^2\right)^3$.

3 Troisième partie

Soit $\mathcal{H}$ la courbe définie par $x \geqslant 1$ et $y = \sqrt{x^2-1}$. Soient A un point de $\mathcal{H}$ et (r, s) le couple de ses coordonnées. On note $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan définie par les relations $1 \leqslant x \leqslant r$ et $y^2 \leqslant x^2 - 1$.

1. Calculer $\mathcal{A}$ en fonction de r et de s (on pourra par exemple effectuer une rotation du repère d'angle $-\pi/4$).
2. *Le but de cette question est de retrouver le résultat précédent en utilisant une méthode dont le principe remonte à Fermat, sans doute peu après* 1658 *: « De æquationum localium transmutatione et emendatione ad ultimodam curvilineorum inter se vel cum rectilineis comparationem, cui annectitur proportionis geometricæ in quadrandis infinitis parabolis et hyperbolis usu » (Œuvres complètes, Tome I, pages 225-285).*

   Soient n un entier naturel non nul et u un réel positif tel que $u^n = r + s$. Pour tout entier k entre 1 et n, on considère le trapèze rectangle T_k (éventuellement réduit à un triangle) dont le côté oblique est le segment ayant pour extrémités les points de coordonnées $\left(u^{k-1}, 0\right)$ et $\left(u^k, 0\right)$, dont les bases ont pour pente -1 et dont l'un des angles droits a pour sommet le point de $\mathcal{H}$ d'abscisse $\frac{u^{k-1}+u^{1-k}}{2}$.

   a. On définit bien ainsi, pour chaque valeur de k, un unique trapèze T_k (réduit à un triangle lorsque $k = 1$) : illustrer par un croquis.

   b. Pourquoi peut-on conjecturer que la somme des aires de ces trapèzes admet $\frac{\mathcal{A}+s^2}{2}$ comme limite lorsque n tend vers l'infini ?

   c. Démontrer la conjecture précédente en utilisant une autre suite de trapèzes combinée à la première.

   d. Retrouver la valeur de $\mathcal{A}$.
3. Soient B et C les points de coordonnées respectives $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ et A un point de coordonnées (x, y) avec $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ tel que le triangle ABC soit pseudo-rectangle en A.

   On note S l'aire du triangle ABC et S' l'aire de la partie du plan constituée des points de la plaque triangulaire définie par le triangle ABC dont les coordonnées (X, Y) vérifient $Y^2 \leqslant X^2 - 1$.

   Étudier une éventuelle limite lorsque x tend vers l'infini du rapport $\frac{S'}{S}$.

4 Quatrième partie

Cette partie se déroule dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ *associé aux coordonnées* (x, y, z).

Dans le plan d'équation $z = 0$, soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1 et soient T et P deux points distincts tels que la droite (TP) soit tangente au cercle (C) en T. Soient B et C les intersections de la droite (OP) avec le cercle (C) et (D) la droite perpendiculaire au plan d'équation $z = 0$ passant par P.

1. **a.** Montrer qu'il existe deux points A et A' appartenant à la droite (D) tels que les triangles ABC et $A'BC$ soient pseudo-rectangles respectivement en A et A' ; donner une construction simple de ces deux points.

   b. Montrer que les coordonnées de ces deux points vérifient l'égalité $x^2 + y^2 = z^2 + 1$.
2. Soit (H) l'ensemble des points A et A' quand T et P varient.

   a. Quelle est l'intersection de l'ensemble (H) avec un plan orthogonal à $\vec{w}$?

   b. Quelle est l'intersection de l'ensemble (H) avec un plan contenant la droite $(O; \vec{w})$?

   c. Montrer que l'ensemble (H) est inclus dans une réunion de droites que l'on précisera.
3. On s'intéresse dans cette dernière question aux points entiers de l'ensemble (H), c'est-à-dire aux éléments de (H) dont les trois coordonnées sont des nombres entiers.

   a. Soit (x, y, z) le triplet des coordonnées d'un tel point. Montrer que x ou y est impair.
   On note désormais $\mathcal{S}$ l'ensemble des triplets (x, y, z) d'entiers naturels strictement positifs tels que x est impair et $x^2 + y^2 = z^2 + 1$.

   b. Soit d un entier strictement positif fixé. Démontrer que l'ensemble des éléments (x, y, z) de $\mathcal{S}$ tels que $\text{PGCD}(x + 1, y + z) = d$ est l'ensemble vide si d est impair et un ensemble infini si d est pair.

   c. Soit m un entier naturel impair supérieur ou égal à 3. Combien y a-t-il d'éléments (x, y, z) de $\mathcal{S}$ tels que $x = m$?
   Déterminer ces éléments lorsque $m = 3, 5, 7, 9$.