

## 1 Problème 1 : De superbes suites

Dans ce problème, on considère des suites finies  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  d'entiers strictement positifs, où  $n$  est un entier supérieur ou égal à 2, appelé *longueur* de la suite finie.

On dit qu'une suite finie d'entiers strictement positifs est *superbe* si chacun de ses termes divise la somme de tous les termes.

Par exemple, la suite  $(1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2)$  est superbe de longueur 8 car  $1+2+1+2+1+2+1+2=12$ , qui est divisible par 1 et par 2; la suite  $(3, 3, 6, 12)$  est superbe de longueur 4 car la somme des termes vaut 24, qui est multiple de 3, 6, 12.

- Déterminer les entiers strictement positifs  $b$  tels que la suite  $(21, 7, b)$  soit superbe.
- Déterminer les suites superbes de longueur 2, puis celles de longueur 3.
  - Déterminer les suites superbes de longueur 4 et dont la somme des termes vaut 2013.
- Montrer que, pour tout entier  $n \geq 3$ , il existe une suite superbe de longueur  $n$  dont les termes sont tous distincts.
  - Montrer que, si  $n \geq 2$ , il n'existe pas de suite superbe de longueur  $n$  dont les termes sont des nombres premiers tous distincts.
- Soit  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  une suite arithmétique finie de raison strictement positive. Montrer que si cette suite est superbe alors  $n = 3$ .
- On dit qu'une suite (infinie)  $(a_k)_{k \geq 1}$  d'entiers strictement positifs est *magnifique* si, pour tout entier  $n \geq 2$ , la suite finie  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  est superbe. Déterminer les suites magnifiques  $(a_k)_{k \geq 1}$  vérifiant  $a_k < a_{k+1}$  pour tout entier  $k \geq 2$ .
- Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 4, et soit  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  une suite finie, pas forcément superbe, d'entiers strictement positifs tous distincts.
  - Montrer qu'il est possible de prolonger la suite de façon à obtenir une suite superbe.
  - Montrer qu'il est possible de prolonger la suite de façon à obtenir une suite superbe dont les termes sont tous distincts.

## 2 Problème 2 : Tiré à quatre épingles

- Dans l'espace, soient  $D_1, D_2$  deux droites non coplanaires et soit  $M$  un point n'appartenant ni à  $D_1$  ni à  $D_2$ . Montrer qu'il existe au plus une droite passant par  $M$  et coupant à la fois  $D_1$  et  $D_2$ . Dans quel cas n'en existe-t-il aucune?

L'espace étant muni d'un repère orthonormé, soit  $ABCDEFGH$  le cube dont les sommets ont pour coordonnées  $A(0,0,0)$ ,  $B(1,0,0)$ ,  $C(1,1,0)$ ,  $D(0,1,0)$ ,  $E(0,0,1)$ ,  $F(1,0,1)$ ,  $G(1,1,1)$ ,  $H(0,1,1)$ . Soient respectivement  $D_1, D_2$  et  $D_3$  les droites  $(EF)$ ,  $(BC)$  et  $(DH)$ .

Enfin, soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des points de coordonnées  $M(x, y, z)$  tels que :

$$xy + yz + zx - (x + y + z) + 1 = 0$$

- Donner une représentation paramétrique de chacune des droites  $D_1, D_2$  et  $D_3$ .
- Montrer que les droites  $D_1, D_2$  et  $D_3$  sont incluses dans  $\mathcal{S}$ .
- Montrer que toute droite de l'espace non incluse dans  $\mathcal{S}$  rencontre  $\mathcal{S}$  en 0, 1 ou 2 points.
- En déduire que toute droite coupant les droites  $D_1, D_2$  et  $D_3$  est incluse dans  $\mathcal{S}$ .
- Soit  $D_4$  une droite qui ne rencontre aucune des droites  $D_1, D_2, D_3$  et qui n'est pas incluse dans  $\mathcal{S}$ . Montrer qu'il existe au plus deux droites de l'espace coupant les quatre droites  $D_1, D_2, D_3, D_4$ .

## 3 Problème 3 : Il faut passer les premiers

Pour ce problème, on donne la liste des vingt-cinq nombres premiers inférieurs à 100 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Pour faire une réussite, Sisyphe a dessiné au sol 106 cases numérotées de 0 à 105, et il dispose d'un jeton et d'un dé à six faces (équilibré).

Sisyphe commence la réussite en posant le jeton sur la case 0. Il fait ensuite une série de lancers du dé; lorsque le dé affiche la valeur  $k$ , il avance le jeton de  $k$  cases et :

- s'il atteint ou dépasse la case numéro 100, Sisyphe a gagné;
- s'il arrive à une case dont le numéro est un nombre premier inférieur à 100, Sisyphe a perdu;
- dans les autres cas, Sisyphe relance le dé et continue la réussite.

- Dans cette question, on suppose que Sisyphe recommence une réussite lorsqu'il a perdu. On note  $p_n$  la probabilité de gagner au moins une réussite en au plus  $n$  lancers du dé.
  - Déterminer les valeurs de  $n$  pour lesquelles  $p_n > 0$ .
  - Étudier la convergence de la suite  $(p_n)$ .

Dans la suite du problème, Sisyphe ne recommence plus la réussite s'il perd.

Soit  $X$  la variable aléatoire représentant la position du jeton à la fin de la réussite.

On note  $\mathbb{P}(X = k)$  la probabilité de l'événement  $X = k$ .

- Déterminer  $\mathbb{P}(X = 2)$ ,  $\mathbb{P}(X = 3)$ ,  $\mathbb{P}(X \geq 4)$ ,  $\mathbb{P}(X = 5)$ .
  - Proposer un algorithme pour calculer  $\mathbb{P}(X = k)$  pour tout  $k \in \{0, \dots, 105\}$ .
- Muni d'une calculatrice qui n'est pas assez performante pour exécuter l'algorithme précédent, Sisyphe cherche à estimer sa probabilité de gain. Pour cela, étant donné deux nombres premiers consécutifs  $p < p'$ , il considère  $\alpha_p$  la probabilité conditionnelle de l'événement  $X = p'$  sachant l'événement  $X > p$ .
  - Que valent  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$ ?
  - Donner l'expression de la probabilité de gain,  $\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(X \geq 100)$ , en fonction des nombres réels  $\alpha_p$  pour  $p = 2, 3, 5, \dots$
  - Donner un encadrement des nombres  $\alpha_p$  et en déduire un encadrement de  $\mathbb{P}(G)$ . (Dans cette question, la qualité de l'encadrement sera un élément d'appréciation.)