

## 1 Problème 1 : Sommes de cubes

Si  $n$  est un entier, on appelle cube de  $n$  l'entier  $n^3$ .

Dans tout le problème, on note :

- \*  $S$  l'ensemble des entiers strictement positifs qui peuvent se décomposer en une somme de cubes d'entiers strictement positifs deux à deux distincts;
- \*  $S_0$  l'ensemble des entiers strictement positifs qui peuvent se décomposer en une somme de cubes d'entiers pairs strictement positifs deux à deux distincts;
- \*  $S_1$  l'ensemble des entiers strictement positifs qui peuvent se décomposer en une somme de cubes d'entiers impairs strictement positifs deux à deux distincts.

Par exemple, 8 et 190 sont dans  $S$  car  $8 = 2^3$  et  $190 = 1^3 + 4^3 + 5^3$ ; 216 et 1072 sont dans  $S_0$  car  $216 = 6^3$  et  $1072 = 2^3 + 4^3 + 10^3$ ; 125 et 2568 sont dans  $S_1$  car  $125 = 5^3$  et  $2568 = 1^3 + 3^3 + 7^3 + 13^3$ .  
L'objectif du problème est de démontrer que tout entier suffisamment grand appartient à  $S$ .

1. Montrer que 2016 appartient à  $S_0$ .
2. a. Montrer que, pour tout réel  $x \geq 5$ , on a  $(2x+1)^3 \leq 2(2x-1)^3$ .  
b. Soit  $k$  un entier supérieur ou égal à 5. Montrer, pour tout entier  $p \geq k$ ,

$$(2p+1)^3 \leq (2k-1)^3 + \sum_{j=k}^p (2j-1)^3$$

où on rappelle que  $\sum_{j=k}^p (2j-1)^3$  désigne la somme  $(2k-1)^3 + (2k+1)^3 + \dots + (2p-1)^3$ .

On rappelle que si  $t, u$  et  $v$  sont des entiers, la notation  $t \equiv u(v)$  signifie que  $v$  divise  $u - t$ .

3. Montrer qu'il existe 288 entiers  $s_1, \dots, s_{288}$  appartenant à  $S_1$  tels que, pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, 288\}$ ,  $s_i \equiv i \pmod{288}$ .

Dans la suite du problème, on fixe des entiers  $s_1, \dots, s_{288}$  appartenant à  $S_1$  tels que  $s_i \equiv i \pmod{288}$  pour tout  $i$ , et on note  $m$  le plus grand des nombres  $s_i$  :

$$m = \max(s_1, s_2, \dots, s_{288})$$

On rappelle que  $n$  réels  $u_1, \dots, u_n$  sont dits en progression arithmétique de raison  $r$  si  $u_{i+1} - u_i = r$  pour tout entier  $i$  tel que  $1 \leq i < n$ .

4. Soit  $n$  un entier tel que  $288n \geq m$ , et soit  $u_1, \dots, u_n$  des entiers naturels en progression arithmétique de raison 288. Montrer que tout entier de l'intervalle  $[m + u_1, 288n + u_1]$  peut s'écrire sous la forme  $s_i + u_j$ , avec  $1 \leq i \leq 288$  et  $1 \leq j \leq n$ .
5. On admet la relation, pour tout réel  $x$ ,

$$(2x+12)^3 + (2x+4)^3 + (2x+2)^3 - (2x+10)^3 - (2x+8)^3 - (2x)^3 = 288$$

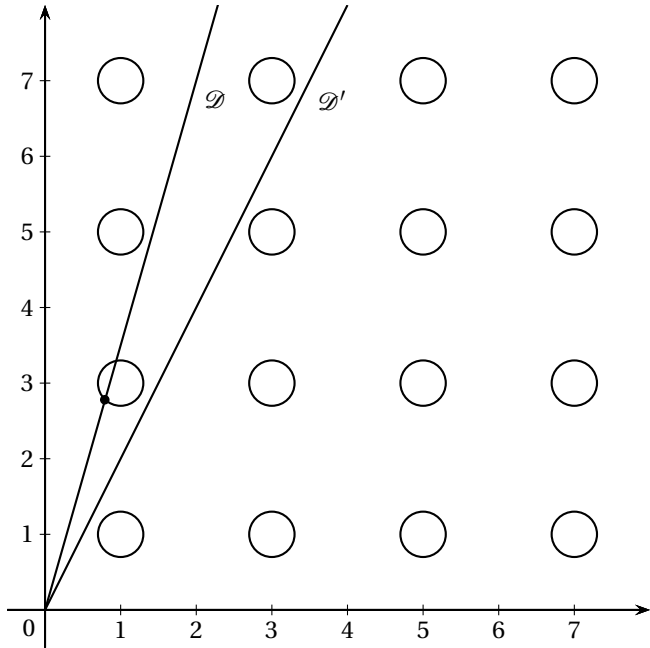
- a. Montrer qu'il existe un entier  $u$  tel que  $u, u+288$  et  $u+576$  appartiennent à  $S_0$ .
  - b. Montrer que, pour tout entier  $n \geq 2$ , il existe  $n$  éléments dans  $S_0$  en progression arithmétique de raison 288.
6. Soit  $k$  un entier supérieur ou égal à 5 tel que  $(2k+1)^3 > m$ .
- a. Montrer qu'il existe un entier  $N \geq 1$  tel que tout entier de l'intervalle  $[N, N+2(2k-1)^3]$  puisse s'écrire sous la forme  $s_i + u$ , avec  $1 \leq i \leq 288$  et  $u \in S_0$ .
  - b. Montrer que tout entier supérieur ou égal à  $N$  appartient à  $S$ .  
Pour tout entier  $p \geq k$ , on pourra examiner le cas des entiers de l'intervalle  $[N, N_p]$ , où

$$N_p = N + (2k-1)^3 + \sum_{j=k}^p (2j-1)^3$$

## 2 Problème 2 : La rangée d'arbres qui cache la forêt

Un observateur se trouve dans une forêt parfaitement régulière, dans laquelle les troncs d'arbres ont tous même diamètre. On ne tient pas compte de la hauteur, ce qui permet de se ramener à un problème dans le plan, qu'on rapporte à un repère orthonormé. L'observateur se trouve à l'origine du repère et les troncs d'arbres sont représentés par des cercles de même rayon  $R > 0$ , centrés aux points de coordonnées  $(a, b)$ , où  $a$  et  $b$  sont des entiers impairs. Il s'agit d'étudier ce que voit l'observateur.

Pour des raisons de symétrie, on peut se restreindre au quart de plan  $x > 0, y > 0$ . On dira que l'observateur « voit à travers la forêt » s'il existe une demi-droite issue de l'origine, contenue dans le quart de plan considéré et ne rencontrant aucun des cercles.



Par exemple, dans la figure ci-dessus, la demi-droite  $\mathcal{D}$  rencontre un arbre, mais pas la demi-droite  $\mathcal{D}'$ . Pour  $m \in ]0, +\infty[$ , on note  $\mathcal{D}_m$  la demi-droite définie par les conditions  $y = mx$  et  $x > 0$ .

Dans ce problème, on admettra que si  $m$  est un nombre irrationnel positif, alors, pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$ , il existe deux entiers naturels impairs  $a$  et  $b$  tels que  $|b - ma| \leq \varepsilon$ .

1. Soient  $a, b, m$  des réels strictement positifs. Montrer que  $\mathcal{D}_m$  rencontre le cercle de rayon  $R > 0$  centré en  $(a, b)$  si et seulement si  $|b - ma| \leq R\sqrt{1 + m^2}$ .
2. En déduire que si  $m$  est irrationnel, alors  $\mathcal{D}_m$  rencontre un arbre.
3. On suppose que  $m = \frac{b}{a}$ , où  $a$  et  $b$  sont des entiers naturels non nuls premiers entre eux.
  - a. On suppose que  $a$  et  $b$  sont impairs. La demi-droite  $\mathcal{D}_m$  rencontre-t-elle un arbre?

- b. On suppose que  $a$  et  $b$  sont de parités différentes et que  $\mathcal{D}_m$  rencontre un arbre. Montrer que  $1 \leq R\sqrt{a^2 + b^2}$ .

4. En déduire que si toutes les demi-droites  $\mathcal{D}_m$ , avec  $m > 0$ , rencontrent un arbre, alors  $R \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$ .
5. On suppose réciproquement que  $R \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$ . Montrer que toute demi-droite  $\mathcal{D}_m$ , avec  $m > 0$ , rencontre un arbre planté en  $(\alpha, 1)$  ou en  $(1, \alpha)$ , où  $\alpha$  est un entier naturel impair.

On appelle première rangée d'arbres l'ensemble des arbres plantés aux points  $(\alpha, 1)$  ou  $(1, \alpha)$ , où  $\alpha$  est un entier naturel impair.

6. Conclure que si l'observateur voit à travers la première rangée, alors il voit à travers la forêt.

### 3 Problème 3 : Allons dans C

Dans tout le problème,  $j$  désigne le nombre complexe  $e^{2\pi i/3}$ .  
La probabilité d'un évènement  $A$  est notée  $\mathbb{P}(A)$ .

1.
  - a. Vérifier que  $j^3 = 1$  et  $1 + j + j^2 = 0$ .
  - b. Que peut-on dire du triangle dont les sommets ont pour affixes  $1, j, j^2$ ?
  - c. Montrer que si  $a, b, c$  sont des nombres réels, alors  $a + bj + cj^2 = 0$  si et seulement si  $a = b = c$ .

On lance un dé équilibré (six faces numérotées de 1 à 6). On note  $F$  la variable aléatoire donnant le nombre obtenu, et on note  $Z$  la variable aléatoire  $j^F$ .

2. Montrer que  $Z$  est à valeurs dans  $\{1, j, j^2\}$  et que  $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = j) = \mathbb{P}(Z = j^2) = \frac{1}{3}$ .

On considère un entier  $n \geq 1$  et on lance le dé  $n$  fois (lancers indépendants). On note  $F_k$  le résultat du  $k$ -ième lancer et  $Z_k = j^{F_k}$ . On note  $S_n = Z_1 + \dots + Z_n$  et  $p_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$ . On note  $U_n$  la variable aléatoire qui donne le nombre d'entiers  $k \in [1, n]$  tels que  $Z_k = 1$ ; on note  $V_n$  celle qui donne le nombre d'entiers  $k \in [1, n]$  tels que  $Z_k = j$  et  $W_n$  celle qui donne le nombre d'entiers  $k \in [1, n]$  tels que  $Z_k = j^2$ .

3.
  - a. Déterminer  $U_n + V_n + W_n$ .
  - b. Montrer que  $S_n = U_n + jV_n + j^2W_n$ .
  - c. Montrer que  $S_n = 0$  si et seulement si  $U_n = V_n = W_n$ .
  - d. En déduire que si  $n$  n'est pas multiple de 3, alors  $p_n = 0$ .
4. On suppose qu'il existe un entier naturel non nul  $m$  tel que  $n = 3m$ .
  - a. Montrer que la variable aléatoire  $U_n$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
  - b. En déduire que  $\mathbb{P}(U_n = m) = \binom{3m}{m} \frac{2^{2m}}{3^{3m}}$ .

On note  $\mathbb{P}_{U_n=m}(V_n = m)$  la probabilité conditionnelle de  $V_n = m$  sachant  $U_n = m$ .

- c. Montrer  $\mathbb{P}_{U_n=m}(V_n = m) = 2^{-2m} \binom{2m}{m}$ .
- d. En déduire  $p_{3m} = 3^{-3m} \binom{3m}{m} \binom{2m}{m}$ .

La question précédente, combinée à une expression classique des coefficients binomiaux, entraîne pour  $m$  entier naturel non nul la relation suivante, qu'on ne demande pas de démontrer :

$$\frac{p_{3m+3}}{p_{3m}} = \frac{(3m+2)(3m+1)}{9(m+1)^2}$$

5. Pour tout entier  $m \geq 1$ , montrer que  $\frac{m}{m+1} \leq \frac{p_{3m+3}}{p_{3m}}$  et en déduire que  $p_{3m} \geq \frac{2}{9m}$ .

Soit  $X_n$  la variable aléatoire qui donne le nombre d'entiers  $k \in [1, n]$  tels que  $S_k = 0$ .

6.
  - a. Déterminer des variables de Bernoulli  $Y_k$ , avec  $1 \leq k \leq n$ , telles que  $X_n = Y_1 + \dots + Y_n$ .
  - b. On note  $\mathbb{E}(X_n), \mathbb{E}(Y_1), \dots, \mathbb{E}(Y_n)$  les espérances de  $X_n, Y_1, \dots, Y_n$ .  
En admettant que  $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(Y_1) + \dots + \mathbb{E}(Y_n)$ , montrer que  $\mathbb{E}(X_n) = p_1 + \dots + p_n$ .
  - c. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n) = +\infty$ .

Soit  $q_n$  la probabilité que l'un des  $S_k$  soit nul pour  $1 \leq k \leq n$ , c'est-à-dire  $q_n = \mathbb{P}(X_n > 0)$ .  
L'objectif de la question suivante est de montrer que la suite  $(q_n)$  converge vers 1.

7.
  - a. Montrer que la suite  $(q_n)$  converge vers un réel  $q$  et que  $q_n \leq q \leq 1$  pour tout  $n$ .
  - b. Pour  $r, n$  entiers naturels non nuls, montrer que  $\mathbb{P}(X_n \geq r) \leq q^r$ .
  - c. En déduire, pour tout entier  $n \geq 1$ , que  $\mathbb{E}(X_n) \leq q + q^2 + \dots + q^n$ .
  - d. Conclure.