Racines : démonstrations d'irrationalité

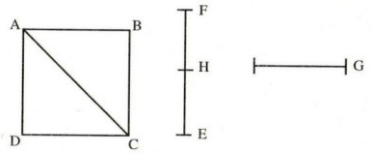
Le pair et l'impair

Source1 : Aristote. (4e siècle av. J.-C.) *Premiers analytiques,* trad. J. Tricot, Vrin , p.121-122.

Toujours, en effet, quand on effectue un raisonnement par l'absurde, on conclut le faux par syllogisme, mais la proposition initiale à démontrer est prouvée hypothétiquement quand une impossibilité résulte de la proposition contradictoire <à la proposition initiale>. On prouve, par exemple, l'incommensurabilité de la diagonale par cette raison que les nombres impairs deviendraient pairs, si on posait la diagonale commensurable ; on tire alors la conclusion que les nombres impairs deviennent égaux aux nombres pairs, et on prouve hypothétiquement l'incommensurabilité de la diagonale parce que une conclusion fausse découle de la proposition contradictoire.

Source2 : Euclide *Les Éléments*. Livre X. Ajout au texte euclidien : 117 *Vulgo*. trad. B. Vitrac, vol.3, PUF. Paris, 1998, pp. 414-415

Qu'il nous soit proposé de démontrer que la diagonale des figures carrées est incommensurable en longueur avec le côté. Soit le carré ABCD et AC sa diagonale ; je dis que CA est incommensurable en longueur avec AB. Si c'est possible qu'elle soit commensurable. Je dis qu'il s'ensuivra que le même nombre est pair et impair. Il est donc bien évident que le [carré] sur AC est double de celui sur AB. Et puisque CA est commensurable avec AB, la [droite] CA, relativement à AB, a comme rapport celui d'un nombre relativement à un nombre <X. 5>. Que ce soit celui de EF relativement à G et que EF, G soient les plus petits parmi ceux ayant le même rapport qu'eux.



Donc EF n'est pas une unité. Car si EF était une unité, puisqu'il a comme rapport relativement à G celui de AC relativement à AB, et que AC est plus grande que AB, EF serait aussi plus grand que le nombre G ; ce qui est absurde. Donc EF n'est pas une unité, [c'est] donc un nombre.

Et puisque comme CA [est] relativement à AB, ainsi est EF relativement à G, donc aussi comme le [carré] sur CA [est] relativement à celui sur AB, ainsi [est] celui sur EF relativement à celui sur G. Or celui sur CA est double de celui sur AB ; donc celui sur EF est aussi double de celui sur G ; celui sur EF est donc pair ; de sorte que EF lui-même est aussi pair.

Car s'il était impair, le carré [décrit] sur lui serait aussi impair, puisque si des nombres impairs en quantité quelconque sont ajoutés, et que leur multitude est impaire, le tout est impair <IX.23> ; le [nombre] EF est donc pair.

Qu'il soit coupé en deux [parties égales] en H. Et puisque les [nombres] EF, G sont les plus petits parmi ceux qui ont le même rapport qu'{eux}, ils sont premiers entre eux <VII. 22>. Et EF est pair ; donc G est impair. Car s'il était pair une dyade mesurerait EF, G – car tout pair a une partie moitié – qui sont premiers entre eux ; ce qui est impossible. Donc G n'est pas pair ; [il est] donc impair.

Et puisque EF est double de EH, le [carré] sur EF est quadruple donc de celui sur EH. Or celui sur EF est double de celui sur G ; donc celui sur G est double de celui sur EH ; donc celui sur G est pair. D'après ce qui a été dit G est donc pair ; mais aussi impair ; ce qui est impossible. Donc CA n'est pas commensurable en longueur avec AB. Ce qu'il fallait démontrer

Par l'algorithme d'Euclide

Source : Denis Daumas *Sur la démonstration de l'irrationalité chez les grecs,* in La démonstration mathématique dans l'histoire, IREM de Lyon, 1990, p. 389-423.

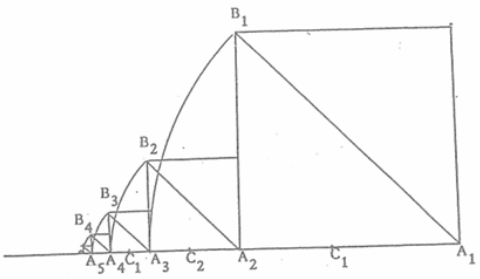
PROPOSITION II.

Deux grandeurs inégales étant proposées, et si la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent ; ces grandeurs seront incommensurables.

Euclide ne donne dans la suite des *Eléments* aucun exemple d'utilisation de ce critère. Pourtant on peut penser que si Euclide lui donne une place et prend la peine de le fonder théoriquement, c'est qu'il a été fécond.

L'exemple qui suit n'est pas historique, mais vise à montrer comment peut fonctionner un tel critère :

Soit un carré de diagonale A_1B_1, de côté A_1A_2. Traçons sur la demi droite (A_1A_2) le point A_3 tel que $A_1A_3 = A_1B_1$. Le carré de côté A_2A_3 a comme diagonale A_2B_2. C_1 est le symétrique de A_3 par rapport à A_2. On recommence avec le carré de diagonale A_2B_2 pour obtenir le carré de côté A_3A_4, et ainsi de suite.



Il s'agit de démontrer l'incommensurabilité de la diagonale A_1B_1 par rapport au côté A_1A_2.

A_1A_2 ne mesure pas A_1B_1 car $\frac{A_1B_1^2}{A_1A_2^2} = 2$ et 2 n'est pas un carre.

1ère soustraction : $A_1B_1 - A_1A_2 = A_2A_3$

2ème soustraction : $A_1A_2 - A_2A_3 = A_1A_2 - A_2C_1 = C_1A_1 = A_2B_2$

(nous utilisons pour cette soustraction la propriété des carrés indiqués au paragraphe précédent).

Le reste A_2A_3 est le côté du carré de diagonale A_2B_2, on est ramené au point de départ : le côté d'un carré ne mesure pas sa diagonale. L'anthyphérèse va donc se poursuivre indéfiniment et nous pouvons conclure : la diagonale et le côté d'un carré sont incommensurables.

Par les rapports de nombres carrés

Source : Marijon & Deforge 1941 (*Algèbre, classe de 3e*, 1941)

Problème. — *Reconnaître si un nombre donné est le carré d'un autre nombre.*

11. Cas d'un nombre entier. — Soit 20 par exemple, qui n'appartient pas à la suite des carrés des premiers nombres entiers : 1, 4, 9, 16, 25...

$$4^2 < 20 < 5^2.$$

Supposons que 20 soit le carré d'une fraction, dont la forme réduite est $\frac{p}{q}$. On aurait l'égalité $\frac{p^2}{q^2} = 20$.

Mais p et q étant premiers entre eux, p^2 et q^2 le sont aussi (n° 32, IVe) et l'égalité précédente, qui suppose que q^2 est un *diviseur* de p^2 ($p^2 = 20\,q^2$) est *impossible*.

Il n'existe donc *aucun nombre entier ou fractionnaire*, dont le carré soit égal à 20.

D'une façon générale :

Si un nombre entier n'est pas le carré d'un entier, il n'est pas non plus le carré d'une fraction.

Donc, si un nombre entier est un carré (on dit quelquefois : un ***carré parfait***), il est nécessairement le carré d'un *autre entier*.

On s'en assurera en consultant une « table de carrés » suffisamment étendue, ou en décomposant le nombre en ses facteurs premiers; l'un et l'autre des deux procédés fournit, en cas de réussite, la racine du nombre.

/…/

II. *Une* ***fraction réduite*** *n'est un carré que lorsque les deux termes sont des carrés parfaits.*

Supposons, en effet, que $\frac{A}{B}$ soit une fraction réduite égale au carré de la fraction $\frac{p}{q}$, également réduite. On a l'égalité : $\frac{A}{B} = \frac{p^2}{q^2}$.

Or p et q étant premiers entre eux, p^2 et q^2 le sont aussi. — Les deux fractions irréductibles, $\frac{A}{B}$ et $\frac{p^2}{q^2}$ ne peuvent être égales que si $A = p^2, B = q^2$.

III. Une fraction réductible peut être un carré sans que ses termes soient des carrés parfaits. C'est le cas de la fraction $\frac{mp^2}{mq^2}$, où m est un entier non carré parfait. Ainsi : $\frac{20}{45} = \frac{5 \times 4}{5 \times 9} = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

Mais *si l'un des termes d'une fraction, égale au carré de la fraction réduite* $\frac{p}{q}$, *est un carré parfait, l'autre sera aussi carré parfait.*

La fraction, égale à $\frac{p^2}{q^2}$, qui est elle-même une fraction réduite, est de la forme $\frac{mp^2}{mq^2}$. Et mp^2 ou mq^2 ne peut être carré parfait que si m

/…/

est carré parfait[1]. — Alors, si $m = n^2$, n^2p^2 et n^2q^2 sont carrés de np et nq.

IV. En particulier, *on reconnaît qu'un* ***nombre décimal*** *qui a un nombre pair* de chiffres décimaux *est carré parfait* à ce que le nombre obtenu par suppression de la virgule est carré parfait.

Exemple : 0,0144 est le carré de 0,12, car $\frac{144}{10\,000}$ est carré de $\frac{12}{100}$.

15. Nous voyons donc que la définition de la racine carrée que nous avons donnée ne s'applique qu'aux nombres qui sont des *carrés parfaits* ou aux fractions dont la *forme réduite a pour termes des carrés parfaits.*

Des nombres comme 2, 3 ... 20 ... qui ne figurent pas dans la table des carrés, ou comme $\frac{2}{3}; \frac{4}{7}; \frac{9}{20}$; 0,12 qui sont des fractions égales à des fractions irréductibles dont les termes ne sont pas tous deux des carrés parfaits, ne sont le carré d'aucun nombre, entier ou fractionnaire.

1. Car si $mp^2 = a^2$, $m\left(=\frac{a^2}{p^2}\right)$ est le carré de la fraction $\frac{a}{p}$; et nous venons de voir (n° 11) qu'un nombre entier ne peut pas être le carré d'une fraction. Cette fraction doit donc être un entier; et m est carré parfait.

/…/

CHAPITRE III

RACINES CARRÉES APPROCHÉES

16. Exemple : *Racines carrées approchées de 20.* — Nous avons vu que 20, qui n'est pas le carré d'un nombre entier, n'est pas non plus le carré d'une fraction.

Notre table des carrés nous montre que :

$$4^2 < 20 < 5^2 \quad (1)$$
$$4{,}4^2 < 20 < 4{,}5^2 \quad (2)$$

Si nous formions, en partant de $440^2 = 193\,600$, une table des carrés de 441, 442 ..... nous constaterions que

$$4{,}47^2 < 20 < 4{,}48^2 \quad (3)$$

Nous traduirons les inégalités (1), (2) et (3) en disant que :

4; 4,4; 4,47 ..... sont les ***racines carrées approchées par défaut*** de 20, *à 1 unité, 1 dixième, 1 centième ... près* et;

5; 4,5; 4,48.... les ***racines carrées approchées par excès*** de 20 à *1 unité, 1 dixième, 1 centième ... près.*

On aurait, de même, en formant les carrés des nombres de 4 470 à 4 480, les racines approchées à 0,001 près; ce sont : 4,473 et 4,474 ... et ainsi de suite.

17. Observons que la donnée de l'une des valeurs approchées à 0,001 près de la racine carrée de 20, celle par exemple de 4,473, approchée par défaut, nous donne immédiatement les valeurs approchées par défaut à 1; 0,1; 0,01 près : 4,4; 4,47, et celles approchées par excès : 5; 4,5; 4,48; 4,474.

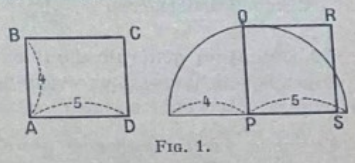


Fig. 1.

18. Interprétation géométrique. — Considérons un rectangle dont l'aire est 20 cm². (Il en existe une infinité, dont les côtés mesurent en cm, a et 20 : a.) Soit par exemple le rectangle ABCD de côtés 5 cm et 4 cm.

Ressources

- *Contribution à une approche historique de l'enseignement des mathématiques. Activités en classe à partir de textes historiques sur l'irrationalité : de Pythagore à Théon de Smyrne,* Denis Daumas (https://publimath.fr/iwh96035/, et https://publimath.fr/ito96010/).
- *Sur la démonstration de l'irrationalité chez les grecs,* Denis Daumas (https://publimath.fr/iwh90023/)
- *Une approche de l'irrationalité : algorithme d'Euclide et fractions continues,* Denis Daumas (https://publimath.fr/iwh94020/)
- *Autour de √2 : promenade historique*, Laboratoire de Mathématiques de Vizille, dans Mathématice n° 76.

Des exercices pour des élèves. En ligne : http://revue.sesamath.net/spip.php?article1450.

Les exercices 5 à 7 portent sur des démonstrations d'irrationnalité.