Calculs avec des racines : Stevin et Chuquet

Démontrer que $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ avec Stevin (1548-1620)

Source : Les œuvres mathématiques de Simon Stevin augmentées par Albert Girard, Leyde, 1634

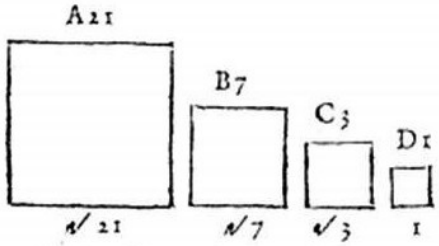
De la multiplication de racines simples.

PROBLEME XXII.

Estant donné racine simple à multiplier, & racine simple multiplicateur : Trouver leur produict.

Exemple 1.

Explication du donné. Soit donnée racine à multiplier $\sqrt{7}$, & racine multiplicateur $\sqrt{3}$. *Explication du requis.* Il fault trouver leur produict. *Construction.* On multipliera 7 (qui est le potence de $\sqrt{7}$) par 3 (qui est la potence de $\sqrt{3}$) faict 21, sa racine quarrée (racine quarrée parce que les racines données sont quarrees) est $\sqrt{21}$. Ie di, que $\sqrt{21}$, est le produict requis. *Preparation de la demonstration.* Soyent descripts quatre quarrez, à sçavoir A 21, & B 7, & C 3, & D 1, & leurs costez seront, $\sqrt{21}$, & $\sqrt{7}$, & $\sqrt{3}$, & 1.



Demonstration. Comme le quarré A, au quarré B, ainsi le quarré C, au quarré D ; Doncques par la 22 proposition du 6 livre d'Euclide, comme le costé de A, au costé de B, ainsi le costé de C, au costé de D, c'est à dire, comme $\sqrt{21}$, a $\sqrt{7}$, ainsi $\sqrt{3}$, a 1 : Nous avons donc trouvé le nombre $\sqrt{21}$, contenant autant de fois le premier donné $\sqrt{7}$, qu'il y a des unitez au nombre second donné $\sqrt{3}$; c'est doncques par la 93 definition, legitime multiplication, & par consequant le produict $\sqrt{21}$, est le vray produict requis ; ce qu'il falloit demonstrer.

Calculer avec des racines carrées chez Chuquet (1445-1488)

Source : Nicolas Chuquet, La géométrie, première géométrie algébrique en langue française (1484), Introduction, texte et notes par Hervé l'Huillier, Vrin, 1979 (texte établi à partir des manuscrits de Chuquet).

TRIANGLE EQUILATERAL INSCRIT

DANS LE CERCLE

BC, côté, = 8.

Calcul du diamètre BG

CO × OD = 16 = GO × OB

or $GO = \frac{OB}{3}$

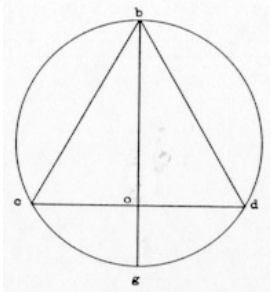
soit GO = x, donc OB = 3 x

puisque GO × OB = 16, donc $3x^2 = 16$

$x = \sqrt{5\frac{1}{3}}$

Donc $OG = \sqrt{5\frac{1}{3}}$, et $OB = \sqrt{48}$

Or $BG = GO + OB = \sqrt{5\frac{1}{3}} + \sqrt{48} = \sqrt{85\frac{1}{3}}$.



Et si la face du triangle .b.c. estoit 8, de combien seroit le dyametre ? Multiplie 8 en soy, montent 64, dont la racine des $\frac{3}{4}$ qui est $R^2.48.$ est la cathetuse, de laquelle le sesquitierce est le dyametre du cercle .b.g.; lequel sesquitierce se peult trouver par la rigle de troys en disant: se 3 demandent 4, que demanderont $R^2.48.$? Multiplie et partiz et trouveras $R^2.85\ \frac{1}{3}.$, et tant seroit le dyametre .b.g. quant .b.c. seroit 8.

Ou aultrement: qui multiplie .c.o. par .o.d. monte 16, aussi fault il que .g.o. multiplié par.o.b. montent 16; et pourtant que .g.o. est le subtriple de .o.b., il convient doncques trouver deux nombres en proporcion triple et telz que multipliez l'ung par l'aultre, montent 16; et pour ce faire je pose 1^1 et 3^1 qui multipliez l'ung par l'aultre montent 3^2, egaulx a 16; partiz 16 par 3^2, si auras $R^2.5\ \frac{1}{3}.$ pour le subtriple .g.o., et par consequent $R^2.48.$ pour le triple .o.b.; lesquelz adjoustez ensemble font $R^2.85\ \frac{1}{3}.$ pour toute la ligne .b.g.

TRIANGLES EQUILATERAUX CONCENTRIQUES

BH = 12 ; CD = 2

Calcul du côté du triangle intérieur FK

Soit la hauteur du triangle extérieur GC.

$GC = \sqrt{108}$

$AC = \frac{1}{3} GC = \sqrt{12}$

Or $AD = \frac{1}{3} ED$, ED étant la hauteur du triangle EFK

$AD = \sqrt{12} - 2$

$ED = \sqrt{108} - 6$

* Soit $FK = \sqrt{\frac{4}{3}(\sqrt{108} - 6)^2} = 12 - \sqrt{48}$. *

Autre méthode

GE = 2 DC *(en effet AC = 2 AC, et AE = 2 AD) *

donc : GE + DC = 2 + 4 = 6

or : $GC = \sqrt{108}$

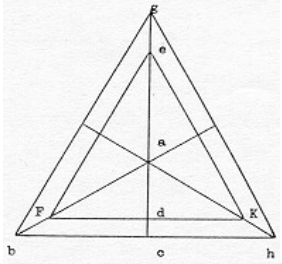
donc : $ED = \sqrt{108} - 6$

En conséquence $FK^2 = \frac{4}{3}(\sqrt{108} - 6)^2$

$= \frac{4}{3}(144 - \sqrt{15552})$

$= 192 - \sqrt{27648}$

$FK = 12 - \sqrt{48}$.



§ 175 : Problème qui trouve son origine dans les petits problèmes vivants de la géométrie des abacistes.

.175. Il est ung triangle equilatere .b.g.h. ayant 12 pour chascune face; sa cathetuse est .g.c.; dedans lequel triangle, en a ung aultre equilatere duquel ses faces sont equedistans des faces du triangle contenant, duquel sa cathetuse est .e.d.; et d'ung triangle a l'aultre y a 2, c'est a dire que la ligne .c.d. est 2; assavoir moult de combien est la face du triangle contenu. Pour faire telles raisons il convient premier sçavoir que la cathetuse .g.c. est $R^2.108$. dont le tiers qui est $R^2.12$. est .a.c., et par ainsi .a.d. si est $R^2.12$. $\bar{m}$ 2 qui est .d.c., que l'on doit tripler et l'on aura $R^2.108$. $\bar{m}$ 6 pour la cathetuse .e.d.

Ou aultrement: l'on doit sçavoir que tousjours .g.e. est le double de .d.c.; ainsi .g.e. avec .d.c. font 6, lesquelz soustraiz de .g.c., reste $R^2.108$. $\bar{m}$ 6 comme devant pour la cathetuse du triangle contenu; laquelle multipliee en soy monte 144 $\bar{m}$ $R^2.15552$ qui est le quarré d'icelle cathetuse; or est vray que es triangles equilateres le quarré de la cathetuse et cellui de l'ypothenuse sont tousjours en telle proporcion comme 3 et 4; et pourtant pour trouver le quarré d'icelle ypothenuse, nous dirons: se 3 valent 4, que vaudront 144 $\bar{m}$ $R^2.15552$. ? Multiplie et partiz ainsi que la rigle de troys requiert, et trouveras 192 moins $R^2.27648$. de laquelle multiplicacion la racine seconde qui est 12 $\bar{m}$ $R^2.48$ si est la face du triangle contenu.

Ressources

- Racines carrées en 3ème : exemple 5 de l'article Enseigner par les activités (Repères-IREM n°8, pages 15-16 et 28-31)

En ligne à partir de Publimath (https://bibnum.publimath.fr/IWR/IWR92005.pdf), ou de la page Repères-IREM du Portail des IREM ou de l'IREM de Grenoble (https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/reperes-irem/consultation-en-ligne/numero-008-reperes-irem/1-enseigner-par-les-activites--1353663.kjsp?RH=1702555927062).