Racines : algorithmes de calcul

Héron d'Alexandrie (1er siècle av. J.-C.)
Source : Traduit du grec par Jacqueline Guichard à partir de l'édition bilingue (grec-allemand) de Hermann Schöne - Leipzig 1903 : Heronis alexandrini opera - Vol. III : Métriques et Dioptrique pp. 18-24

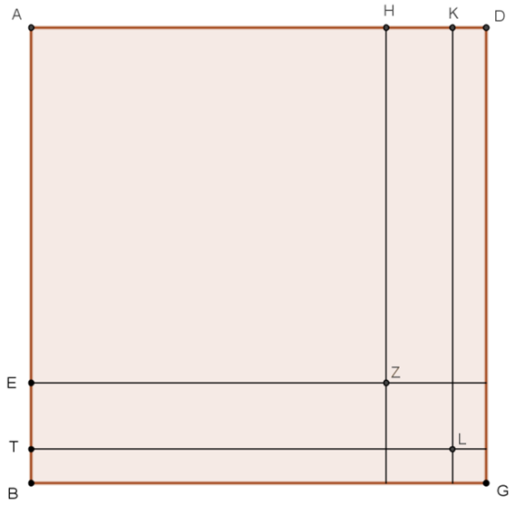
VIII Il y a une méthode générale pour trouver, sans perpendiculaire, la surface d'un triangle quelconque dont les trois côtés sont donnés.
Par exemple, que les côtés du triangle soient de 7, 8 et 9 unités. Additionne 7, 8 et 9 ; cela fait 24 ; de ceci prends la moitié ; cela fait 12 ; retranche 7 ; il reste 5. De nouveau retranche de 12, 8 ; il reste 4 ; et retranche-lui de nouveau 9, il reste 3. Fais le produit de 12 par 5 ; cela fait 60 ; multiplie-le par 4 ; cela fait 240 ; multiplie ce dernier par 3, cela fait 720. Prends la racine de celui-ci : ce sera la surface du triangle.
Puisque donc, 720 n'a pas de racine rationnelle, nous extrairons, avec la plus petite différence possible, la racine de la façon suivante :
puisque le carré qui s'approche le plus de 720 est 729 et a pour racine 27, divise 720 par 27 ; cela fait 26 et 2/3 ; ajoute 27 ; cela fait 53 2/3 ; prends-en la moitié ; cela fait 26 1/2 1/3. Ainsi donc, la racine la plus proche de 720 sera 26 1/2 1/3.
En effet, 26 1/2 1/3 multiplié par lui-même fait 720 1/36 ; de sorte que, la différence est de 1/36.
Si nous voulons que la différence devienne inférieure à 1/36, nous mettrons les 720 1/36 trouvés tout à l'heure à la place de 729 et, après avoir fait les mêmes opérations, nous trouverons que la différence devient inférieure de beaucoup à 1/36.
/.../

(suit la démonstration géométrique de la proposition VIII)
Note : C'est le même mot qui, en grec, désigne la racine et le côté : πλευρά (pleura).

Ressources
- *Histoire d'algorithmes, épisode 3 et 4 : L'algorithmique à Alexandrie : Héron,* Corol'aire (en ligne : https://publimath.fr/apc18005/ et https://publimath.fr/apc18010/).
- *Algorithmique et programmation au cycle 4 à partir des grandeurs,* IREM de Poitiers, (https://publimath.fr/ipo17001/), où l'on trouvera l'application de l'algorithme au calcul de l'aire du triangle équilatéral, avec sa comparaison à deux autres algorithmes anciens pour le même calcul (aire du triangle équilatéral).
- *Histoire d'Algorithmes,* Belin, (https://publimath.fr/avm10045/).
- *Héron* (biographie : https://publimath.fr/he012/).
- *Histoires de Mathématiques. Analyse. De Babylone ou d'ailleurs,* Bernard Ycart (https://publimath.fr/wvm19034/).
- *Autour de √2 : promenade historique*, Laboratoire de Mathématiques de Vizille, dans Mathématice n° 76. Des exercices pour des élèves. En ligne : http://revue.sesamath.net/spip.php?article1450. L'exercice 1 porte sur la tablette YBC7289, et l'exercice 3 sur l'algorithme de Héron.
- *Sur la démonstration de l'irrationalité chez les grecs,* Denis Daumas (https://publimath.fr/iwh90023/). On trouve dans cet article une partie sur l'algorithme de Héron, et des essais de reconstructions des algorithmes babyloniens en particulier celui de la tablette YBC 7289.

Théon d'Alexandrie (335-405)
Source : Théon d'Alexandrie, *Commentaire sur le premier livre de la Composition mathématique de Ptolémée*, traduit par l'Abbé Halma, Paris, 1821 p. 184-186. On en trouvera une autre traduction dans *Histoire d'algorithmes*, la meilleure étant celle de l'édition de 2010.

On cherchera comment, étant donnée, l'aire d'un carré dont le côté n'est pas d'une longueur déterminée, nous calculerons ce côté approximativement.
Suivant le quatrième théorème du second livre des éléments, le carré d'une droite entière, quelle qu'elle soit, est égal à la somme des carrés des segments de cette droite, et au double du rectangle des segments. En effet, ayant un nombre carré donné, tel que 144, dont le côté rationnel soit la droite AB, prenant 100 qui est le plus grand carré inférieur contenu dans ce nombre, et dont le côté est 10, et faisant AG égale à 10, doublons ce nombre ci, parce que le rectangle des segments est pris deux fois ; divisons le reste 44 par le produit 20, reste 4 qui est le carré de GB, dont la longueur est 2. Or AG était 10, donc la droite entière est longue de 12. C'est ce qu'il s'agissait de démontrer.
Mais, pour rendre cette démonstration de la distinction des parties d'un tout, plus sensible, par son application à quelque nombre contenu dans la composition (de Ptolémée), nous l'avons appliquée au nombre 4500 dont il a fait le côté de 67 4' 55".



Supposons ABGD l'aire du carré, seule rationnelle, et qu'il s'agisse d'en calculer le côté approximativement. Puisque le carré le plus proche de 4500, ayant un côté rationnel, est 4489, carré du côté 67, ôtons le carré AZ, ou 4489, dont le côté est 67, du carré ABGD, le gnomon BZD vaudra donc les 11 parties restantes. Réduisons-les en primes, nous en aurons 660. Ensuite doublons EZ = 67, parce que EZ est multiplié deux fois, prenons ZH comme prolongeant EZ, et divisons les 660 primes par 134. Cette division donne 4 primes, et nous avons ainsi chacune des droites ET, HK. En complétant les parallélogrammes TZ, ZK, nous aurons 536 pour les deux, ou 268 pour chacun. Puis réduisant les 124 primes restantes en 7440 secondes, nous en retrancherons le parallélogramme de complément ZL = 16 secondes, de manière qu'en ajoutant le gnomon au premier carré AZ, nous ayons le carré AL fait sur le côté 67 4', de 4497 56' 16". Enfin le gnomon restant BL LD est de 2 3' 44", c'est-à-dire de 7424 secondes. Doublant donc encore TL, comme étant prolongée par LK, et divisant ces 7424 secondes par 134 8', il viendra 55 secondes à peu près au quotient, pour la valeur de chacune des droites TB et KD. Complétant les parallélogrammes BL, LD, nous les aurons de 7377 secondes et 20 tierces, et chacun de 3688"40"' ; mais il reste encore 46" 40"' qui font à peu près le carré LG, dont le côté est 55". Ainsi, le côté du carré ABGD, 4500, se trouve être à peu prés de 67 4' 55".
En général, si nous cherchons le côté du carré (la racine carrée de quelque nombre), nous prenons d'abord le côté (racine) du nombre carré le plus approchant. Ensuite, le doublant, et divisant par ce double, le reste du nombre donné réduit en primes, nous ôtons du quotient, le carré ; puis réduisant encore le reste en secondes, et le divisant par le double des unités et des primes, nous aurons à peu prés le nombre cherché, qui exprime le côté de l'espace carré.

Ressources

- *Histoire d'algorithmes, épisode 5 : L'algorithmique à Alexandrie : Théon,* Corol'aire (en ligne : https://publimath.fr/apc18013/).
- *Algorithmique et programmation au cycle 4 à partir des grandeurs,* IREM de Poitiers, (https://publimath.fr/ipo17001/), où l'on trouvera l'algorithme et des remarques sur les dénominations, sur l'identité remarquable base de l'algorithme, et sur la numération sexagésimale.
- *Histoire d'Algorithmes,* Belin, (https://publimath.fr/avm10045/).
- *Théon* (biographie : https://publimath.fr/th028/).
- *A propos de quelques algorithmes liés à des opérations élémentaires,* article de Michel Guillemot (en ligne : https://publimath.fr/iwh90040/), avec des éléments sur les algorithmes de Héron et Théon, et une conclusion faisant référence au calcul des racines carrées.
- *Contribution à une approche historique de l'enseignement des mathématiques. Activités en classe à partir de textes historiques sur l'irrationalité : de Pythagore à Théon de Smyrne,* Denis Daumas (https://publimath.fr/iwh96035/).