Construire géométriquement les racines carrées

Ou construire un carré d'aire égale à une aire donnée : la quadrature des figures

Chez Euclide : construction d'un carré d'aire A, donc de côté $\sqrt{A}$
Source : ***Les Eléments*** II 14 (trad. Bernard Vitrac, tome 1, PUF, 1990, p. 361).

Construire un carré égal à une figure rectiligne donnée.

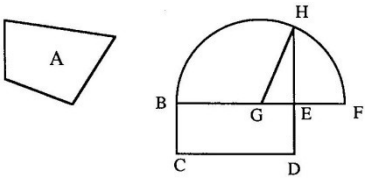
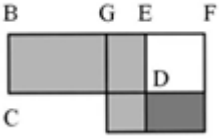


Figure de la proposition II.5 :



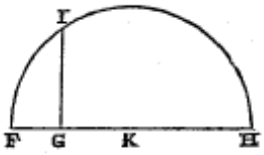
Soit A la figure rectiligne donnée. Il faut alors construire un carré égal à la figure rectiligne A.
En effet, que soit construit BD un parallélogramme rectangle égal à la figure rectiligne A (Proposition I. 45).
Si effectivement BE est égale à ED, ce qui était prescrit aura été fait : car le carré BD a été construit égal à la figure rectiligne A.
Sinon, l'une des droites BE, ED est plus grande. Que ce soit BE la plus grande et qu'elle soit prolongée vers F, et que soit placée EF, égale à ED. Que BF soit coupée en deux parties égales en G, et que du centre G avec l'un des GB, GF comme intervalle, soit décrit le demi-cercle BHF; et que DE soit prolongée jusqu'en H ; et que GH soit jointe.
Or puisque la droite BF a été coupée d'une part en segments égaux en G, d'autre part en segments inégaux en E, le rectangle contenu par BE, EF, pris avec le carré sur EG, est donc égal au carré sur GF (Proposition II. 5). Or GF est égale à GH (Définition I. 15). Donc le rectangle contenu par BE, EF, pris avec le carré sur GE, est égal au carré sur GH. Or les carrés sur HE, EG sont égaux à celui sur GH (Proposition I. 47). Donc le rectangle contenu par BE, EF pris avec le carré sur GE est égal à ceux sur HE, EG (Notion commune 1). Que le carré sur GE soit retranché de part et d'autre : ce qui reste, le rectangle contenu par BE, EF est donc égal au carré sur EH (Notion commune 3). Mais le rectangle contenu par BE, EF est BD, car EF est égale à ED. Donc le parallélogramme BD est égal au carré sur HE. Or BD est égal à la figure rectiligne A. Et donc la figure rectiligne A est égale au carré qui sera décrit sur EH. Donc un carré, égal à la figure rectiligne donnée A, a été construit : celui qui sera décrit sur EH. Ce qu'il fallait faire.

Chez Descartes (1596-1650) : construction de $\sqrt{a}$
Source : ***La géométrie***, in Discours de la méthode, 1637, page 298.

L'extraction de la racine carrée.

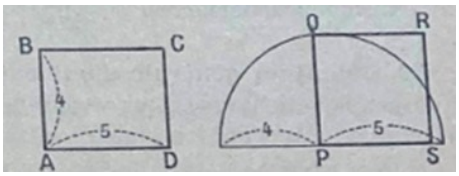
Ou s'il faut tirer la racine carrée de GH *(fig. 2)*, je lui ajoute en ligne

Fig. 2.

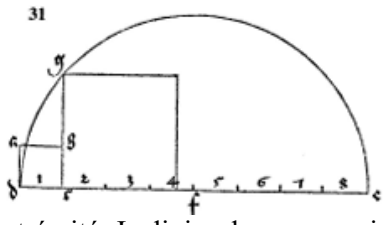


droite FG, qui est l'unité, et divisant FH en deux parties égales au point K, du centre K je tire le cercle FIH, puis élevant du point G une ligne droite jusques à I à angles droits sur FH, c'est GI la racine cherchée. Je ne dis rien ici de la racine cubique, ni des autres, à cause que j'en parlerai plus commodément ci-après.

Dans un manuel de 3e(1941) : construction de $\sqrt{20}$
Source : Marijon & Deforge 1941 (*Algèbre, classe de 3e*, 1941)



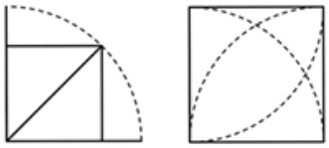
Chez Dürer (1471-1528) : quadrature de 7 fois l'aire d'un carré ou construction de $\sqrt{7}$
Source : ***Géométrie***, 1525, trad. Jeanne Peiffer, Seuil, 1995, page 225.



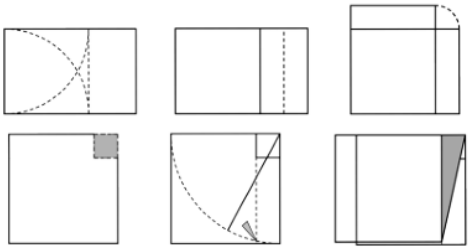
Et afin que l'on retienne bien les choses très utiles que je viens d'expliquer, je vais encore construire par la méthode précédente un carré dont l'aire vaut sept fois celle d'un carré donné. Je procède comme suit. Je me donne un quadrilatère rectangle abcd ayant ses côtés et ses angles égaux. Puis je juxtapose huit fois son côté sur une horizontale dont d est l'origine et e l'autre extrémité. Je divise de par un point f en son milieu, je prends mon compas, je le pose avec une de ses pointes sur le point f et je décris de l'autre un arc de cercle joignant par le haut d à e. Puis je construis sur le premier côté le petit quadrilatère abcd, je prolonge la verticale bc jusqu'à ce qu'elle coupe le cercle en g. Si je forme un carré avec cette longueur et trois autres identiques, il contiendra sept fois plus que le premier abcd, comme je l'ai représenté sur la figure.

Dans l'Inde védique (1500-500 av. J.-C.) : constructions à la corde et aux piquets
Source : ***Les Sulbasutras*** de Baudhayana et Katyayana, où ne figure que le texte.

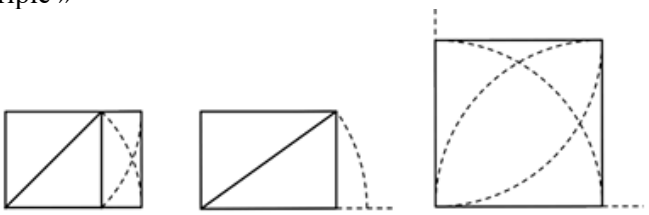
Pour deux carrés égaux : « La diagonale du carré produit le double de l'aire »



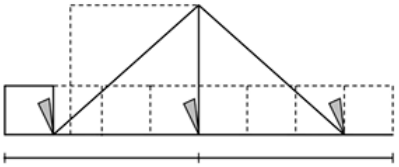
Pour un rectangle : « Si l'on souhaite transformer un rectangle en carré, prendre sa largeur comme côté d'un carré; le reste est divisé en deux parties égales et placé sur deux côtés. La place vide est remplie avec un morceau; l'enlèvement de ce morceau a déjà été établi. »



Pour trois carrés égaux : « La largeur d'un rectangle étant le côté d'un carré donné et la longueur le côté d'un carré double, la diagonale est le côté du carré triple »



Pour n carrés égaux : « Le côté transversal [c'est-à-dire la base du triangle] doit mesurer un de moins que le nombre de carrés à combiner en un carré; les deux [autres] côtés doivent mesurer un de plus que cela. On forme un triangle [isocèle]; l'altitude le produit [le côté du carré] ». (Katyayana)



Ressources

- ***Rectangulation et quadrature des figures,*** in Géométries d'hier à demain (p. 47-73).
En ligne : https://publimath.fr/iwh22004/
- *Autour de √2 : promenade historique*, Laboratoire de Mathématiques de Vizille, dans Mathématice n° 76. Des exercices pour des élèves. En ligne : http://revue.sesamath.net/spip.php?article1450.
Exercices 8 et 9 sur les constructions d'Euclide et Descartes.
- Gilles Waehren, ***« Descartes a dit »***, Utilisation d'extraits de "La Géométrie" en classe de Seconde, Bulletin de l'APMEP n°463 (pages 186-192).
En ligne : https://www.apmep.fr/IMG/pdf/AAA06016.pdf
- Olivier Keller, ***La géométrie des Sulbasutras,*** in Repères-IREM. N° 40. (p. 115-124).
En ligne : https://publimath.fr/iwr00028/