Les kaléïdocycles irréguliers fermés(*)

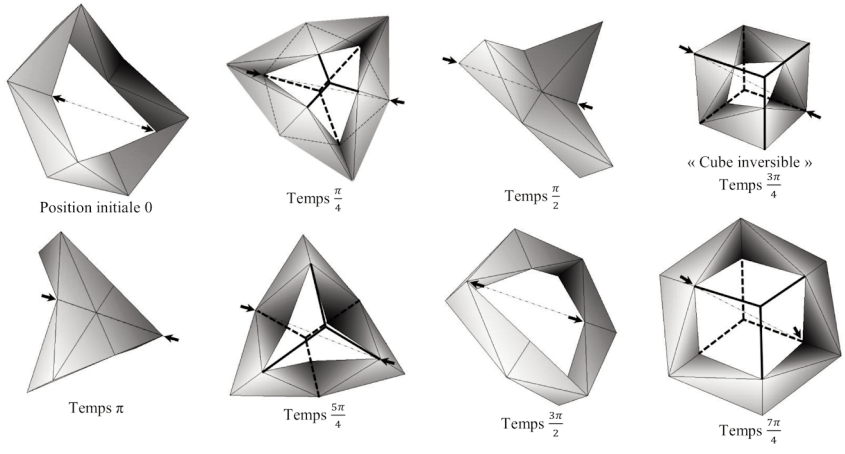
Carole Le Beller(**)

1. Introduction

Curieux, intrigants, beaux, rigolos, ludiques, infinis, géométriques, étoilés, intéressants, spéciaux, …, ce sont autant d'adjectifs entendus à la découverte des kaléïdocycles. Lorsqu'on les connait et qu'on « se les apprivoise », les kaléïdocycles, même s'ils ne servent à rien, pour l'instant, dans notre vie quotidienne, sont mathématiquement gigantesques.

2. Petite histoire des kaléïdocycles

En 1929, Paul Schatz(1), mathématicien, sculpteur et inventeur allemand (de l'oloïde notamment), découvre que les solides de Platon peuvent être inversés, dont « the invertible cube ». Ce « cube inversible » n'est autre qu'un kaleïdocycle particulier qui est le résultat d'un kaléïdocycle irrégulier fermé d'ordre 6, coupé tour à tour sur ses deux plans de symétrie (cf. Séries figures 1 et 2). Par une rotation du kaléïdocycle sur lui-même, au temps $\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, le cube se dessine en prolongeant les six arêtes les plus courtes des tétraèdres. De même, aux temps $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$, c'est la trace du cube qui se dessine. Paul Schatz a trouvé que la longueur de la diagonale de la ceinture du cube est constante. Sur les figures ci-après, les arêtes du cube sont en gras et en pointillés gras, et les extrémités de la diagonale sont indiquées par des flèches.



Série de figures 1 : temps de rotation sur lui-même d'un quart du kaléïdocycle irrégulier fermé d'ordre 6 (images paramétrées à partir de l'applet Java de Marcus Engel et modifiées)

(*) Atelier aux Journées Nationales de Paris.

(**) professeure de mathématiques à Rennes, APMEP Régionale de Rennes et membre du CA de l'IREM de Rennes. carole.lebeller@laposte.net

(1) Site de la Fondation de Paul Schatz : http://www.paul-schatz.ch/home/

Les travaux de Paul Schatz sur « the invertible cube » seront peut-être utilisés dans un « dispositif de mouvement-conversion pour la production de l'utilisation de l'énergie éolienne et hydrique ». Un brevet international a été déposé dans ce sens par Olivier Conradt en 2005.

En 1958, Wallace Walker, étudiant américain, découvre une grille appelée « forme IsoAxis® » (brevet U.S. nº 3302321), alors qu'il travaille sur un projet de création structurelle à partir du papier. Pliée, étirée, tordue, déformée, assemblée à une autre, modifiée, cette grille devient le développement d'une forme tridimensionnelle : un kaléïdocycle. Dans leur livre *M. C. Escher kaléïdocycles*(2), Doris Schattschneider et Wallace Walker nous précisent la signification du mot « **kaléïdocycle**», qui vient du grec : **kalós (beau) + eîdos (aspect) + kyklos (cercle)**. Pour la mathématicienne américaine Doris Schattschneider, les kaléïdocycles sont chacun un anneau de tétraèdres faisant partie d'une classe infinie de formes tridimensionnelles. Selon que les tétraèdres sont réguliers ou irréguliers et selon leur nombre, en manipulant le kaléïdocycle (anneau de tétraèdres), il est possible ou non de le faire tourner sur lui-même. Ceux qui tournent sur eux-mêmes sont périodiques et pour les décorer avec des pavages, seuls des motifs périodiques, comme certains de Maurits Cornelis Escher peuvent convenir. Le livre, cité ci-dessus, comporte des planches de grilles IsoAxis, qu'il ne reste plus qu'à découper, plier et coller pour obtenir plusieurs kaléïdocycles avec des pavages de M.C. Escher.

En 2003, dans son texte *Les kaléïdocycles de M. C. Escher*, après une courte analyse des différents kaléïdocycles, dont ceux capables de tourner sur eux-mêmes (description mathématique de leur rotation), Marcus Engel(3) énonce les propriétés mathématiques des tétraèdres les composant, précise les conditions d'existence des kaléïdocycles en fonction du nombre de tétraèdres et décrit quelques cas spéciaux en faisant allusion au « cube inversible » de Paul Schatz. Son étude s'accompagne de sa superbe animation interactive en Java dans laquelle il est possible de paver les kaléïdocycles avec deux pavages de Maurits Cornélis Escher. On constate que les types de pavages utilisés sont « p6 » et « p6m » de la classification d'Evgraf Fedorov(4).

3. Des kaléïdocycles irréguliers fermés d'ordres 6 et 8 construits à partir d'enveloppes

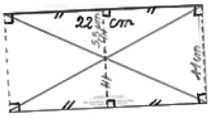
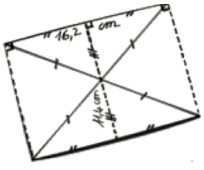
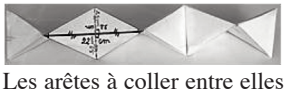
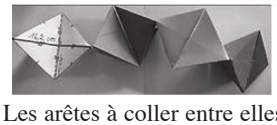
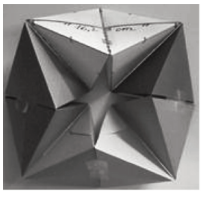
Peu de temps après, Rémi Belloeil, professeur de mathématiques et président de la Régionale de Bretagne de l'APMEP, constate que les enveloppes de correspondance traditionnelles de formats ISO 269 : DL (110×220 mm^2) et C6 (114×162 mm^2), permettent de construire simplement des kaléïdocycles irréguliers fermés respectivement d'ordre 6 et d'ordre 8. Une animation de découverte scientifique des kaléïdocycles « *Maths en 3D !* » utilisant cette construction à partir d'enveloppes est

(2) Schattschneider, D., Walker, W., 2007, *M.C. Escher kaleïdocycles*, Köln : Taschen GmbH.

(3) Engel, M., Site (incontournable) :
http://www.kaleidocycles.de/intro.shtml et http://www.kaleidocycles.de/anim.shtml.

(4) Mathématicien, cristallographe et minéralogiste russe (1853-1919).

alors proposée aux collèges et lycées du bassin rennais par un animateur de l'Espace des Sciences de Rennes. Je détaille ci-après la méthode des enveloppes que j'ai utilisée lors de mes ateliers aux journées de l'APMEP à Rouen en 2009, puis à Paris en 2010.

Kaléïdocycle irrégulier fermé d'ordre 6	**Méthode de construction avec des enveloppes**	**Kaléïdocycle irrégulier fermé d'ordre 8**
 Les mesures de l'enveloppe rectangulaire DL sont 22 × 11 cm^2, c'est-à-dire : Longueur L = 22 cm et largeur l = 11 cm. Trois enveloppes sont nécessaires.	– Fermer l'enveloppe. – Tracer les diagonales de l'enveloppe (recto et verso) et les repasser à la pointe sèche du compas pour casser les fibres du papier sans déchirer. – Tracer la médiatrice des deux longueurs. – Couper l'enveloppe sur cette médiatrice pour la partager en deux.	 Les mesures de l'enveloppe rectangulaire C6 sont 16,2 × 11,4 cm^2, c'est-à-dire : Longueur L = 16,2 cm et largeur l = 11,4 cm. Quatre enveloppes sont nécessaires.
 Les quatre faces de chaque tétraèdre sont des triangles isocèles de base principale 11 cm.	– Plier sur les diagonales et constituer 2 tétraèdres irréguliers en les fermant avec du ruban adhésif. – Construire de la même manière : 4 autres tétraèdres avec 2 enveloppes pour le kaléïdocycle d'ordre 6, ou 6 autres tétraèdres avec 3 autres enveloppes pour le kaléïdocycle d'ordre 8.	 Les quatre faces de chaque tétraèdre sont des triangles isocèles de base principale 11,4 cm.
 Les arêtes à coller entre elles mesurent 11 cm.	– Assembler les tétraèdres avec du ruban adhésif sur les bases principales des faces. – Une chaîne de tétraèdres est alors constituée.	 Les arêtes à coller entre elles mesurent 11,4 cm.
	– Assembler les deux tétraèdres des extrémités de la chaîne par les arêtes (bases des triangles isocèles). – Un anneau de tétraèdres irréguliers est constitué, c'est **un kaléïdocycle irrégulier fermé d'ordre 6** (à gauche) et **d'ordre 8** (à droite). Il reste juste à manipuler, c'est magique !	

Connaissant déjà les kaléïdocycles et les ayant déjà fait construire par mes élèves à partir d'une grille ressemblant à celle de Wallace Walker, j'avais retenu cette animation pour trois classes de Sixième du collège Pierre Perrin de Tremblay (35) en 2007-2008 (56 élèves et 2 enseignants étaient concernés). Cette animation fut le point de départ du « projet kaléïdocycle irrégulier fermé d'ordre 6 »(5) de cette année-là pour mes 37 élèves de deux classes différentes (voir mes ateliers aux journées de l'APMEP à Rouen en 2009).

Ce type d'animation de découverte scientifique (utilisant la démarche expérimentale) et l'étude des kaléïdocycles ainsi que leur décoration sont adaptables à plusieurs niveaux de classes de collège et de lycée, mais aussi à l'université. Les kaléïdocycles sont des objets d'étude fantastiques. Les notions mathématiques utilisables étant très diversifiées, leur liste n'est pas exhaustive. Ainsi, elles peuvent être, au collège : rectangle de barlong, losange, triangles particuliers, symétries, pavages du plan, tétraèdres, théorème de Pythagore, polygones, polygones réguliers, trigonométrie, agrandissement-réduction, aires, vocabulaire de la géométrie plane et de l'espace ; au lycée : nombre d'or, pavages et graphes des couleurs, nombres complexes, rotations dans le plan, calculs de limites ; à l'université : symétries et rotations dans l'espace, plans de symétrie, théorie des groupes(6) avec $\mathcal{D}_n$ et $\mathbb{Z}_2$ entre autres.

Lors de l'atelier, j'ai choisi de présenter la plus récente de mes expérimentations. Mais avant, permettant une construction rapide et simple de l'objet étudié, la méthode des enveloppes, ne me quittant plus, a alors été au cœur de ma problématique mathématique. Ces formats d'enveloppes correspondent-ils précisément à la construction de tétraèdres composant les kaléïdocycles irréguliers fermés d'ordres 6 et 8 ? Quels sont les rapports exacts entre la largeur et la longueur des enveloppes ? Existe-t-il d'autres formats connus utilisables pour construire des kaléïdocycles irréguliers fermés d'ordre strictement supérieur à 8 ?

4. Modélisation (par leurs plans de symétrie) des kaléïdocycles irréguliers fermés

Les kaléïdocycles sont des anneaux de tétraèdres connectés entre eux, deux à deux, par leurs arêtes de même longueur. Ils peuvent être réguliers ou irréguliers. Les kaléïdocycles réguliers sont les kaléïdocycles dont les tétraèdres sont réguliers (leurs faces sont des triangles équilatéraux). Ils ne peuvent tourner sur eux-mêmes que si leur nombre de tétraèdres réguliers est supérieur strictement à 6. Les kaléïdocycles irréguliers sont ceux dont les tétraèdres sont irréguliers (leurs faces ne sont pas des triangles équilatéraux).

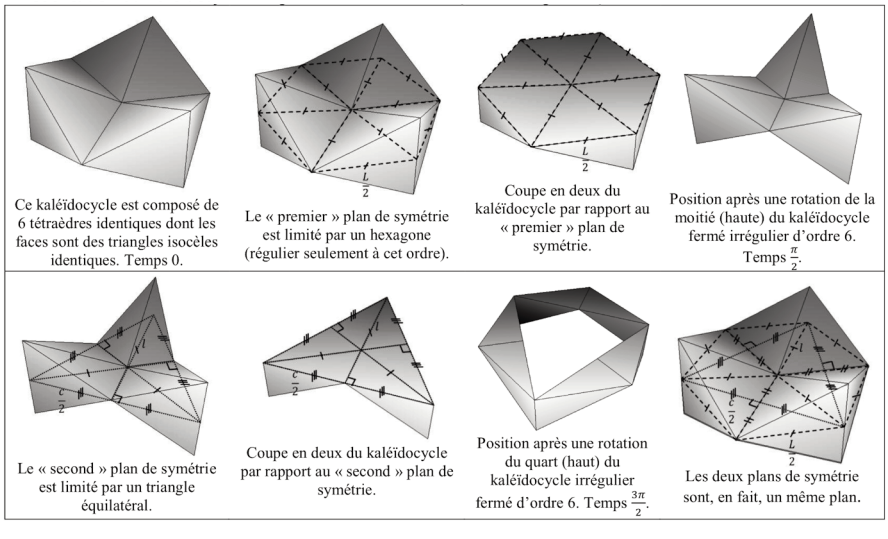
(5) Projet téléchargeable sur mon *Site 123portail.education* à l'adresse :
http://123portail.education.free.fr/pdf/6eme/2008-projet-kaleidocycle-6-clb-v2.pdf
et page web sur le Kaléïdocycle irrégulier fermé d'ordre 6, Site perso. *Math'@ctivité* à l'adresse :
http://mathactivite.free.fr/menus/01p03-kaleidocycle-6.php.

(6) cf. Bush, L., 2003, *A Group Theoretic Approach to Kaleidocycles and Cubeocycles* (voir bibliographie).

Selon Marcus Engel, tous les kaléïdocycles irréguliers sont dits fermés lorsqu'ils ont la même propriété à quatre temps de la rotation du kaléïdocycle sur lui-même $\left(0, \frac{\pi}{2}, \pi \text{ et } \frac{3\pi}{2}\right)$: les sommets des tétraèdres sont confondus en l'origine (c'est-à-dire que l'« œil » de l'anneau se ferme pour ces positions). Et étant composés d'un nombre pair minimum de 6 tétraèdres, l'ordre *n* de ces kaléïdocycles est un nombre entier pair supérieur ou égal à 6.

Pour qu'un kaléïdocycle irrégulier fermé arrive à tourner sur lui-même, il doit être symétrique par rapport à deux plans (lors de sa rotation). Les faces de ses tétraèdres sont donc des triangles isocèles. On peut couper le kaléïdocycle une première fois en deux pour obtenir deux kaléïdocycles rectangles symétriques ne se fermant que sur trois temps $\left(0, \frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Les faces différentes de leurs tétraèdres laissent apparaître un polygone à *n* côtés (face de chaque demi-kaléïdocycle) lors de deux des positions fermées (0, π). Ce polygone est partagé en un nombre pair de triangles isocèles symétriques par rapport à ses diagonales. Puis, après une rotation sur lui-même du kaléïdocycle rectangle du dessus, au temps $\left(\frac{\pi}{2}\right)$, on peut à nouveau le couper en deux pour obtenir deux autres kaléïdocycles symétriques ne se fermant que sur deux temps $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ et une de leurs faces est un polygone régulier à $\frac{n}{2}$ côtés lors des positions fermées. Pour qu'un kaléïdocycle soit fermé, on constate que, si on lui fait subir une rotation sur lui-même, ces deux plans de symétrie sont, en fait, un même plan.

Le **kaléïdocycle irrégulier fermé d'ordre 6**

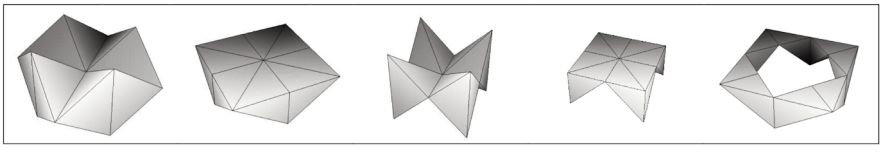


Modélisation du kaléïdocycle irrégulier fermé d'ordre 6 (série de figures 2)

Le « premier » plan de symétrie est limité par un polygone à n côtés correspondant à l'ordre du kaléïdocycle, avec n pair et $n \geq 6$. Un sommet sur deux (alternés) est sur un cercle de rayon l et les autres sommets alternés sont connectés par les sommets du polygone régulier à $\frac{n}{2}$ côtés et d'apothème $\frac{l}{2}$.

Après une rotation du kaléïdocycle, au temps $\frac{3\pi}{2}$, le « second » plan de symétrie, confondu avec le « premier », est limité par ce dernier polygone régulier. Comme précédemment, en modifiant et choisissant judicieusement les paramètres dans l'animation de Marcus Engel, les séries d'images suivantes ont pu être exportées.

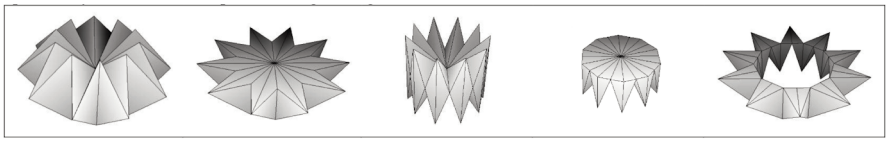
Le **kaléïdocycle irrégulier fermé d'ordre 8** est composé de 8 tétraèdres identiques dont les faces sont des triangles isocèles identiques. Son « premier » plan de symétrie est limité par un octogone (carré) et son « second » plan de symétrie est limité par un carré.



Le **kaléïdocycle irrégulier fermé d'ordre 10** est composé de 10 tétraèdres identiques dont les faces sont des triangles isocèles identiques. Son « premier » plan de symétrie est limité par un décagone et son « second » plan de symétrie est limité par un pentagone régulier.

Le **kaléïdocycle irrégulier fermé d'ordre 12** est composé de 12 tétraèdres identiques dont les faces sont des triangles isocèles identiques. Son « premier » plan de symétrie est limité par un dodécagone et son « second » plan de symétrie est limité par un hexagone régulier.

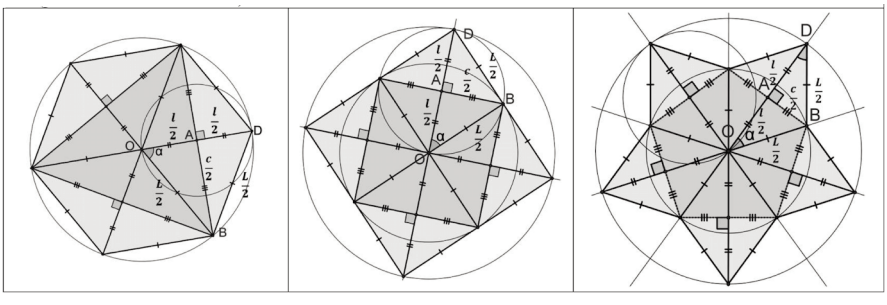
Le **kaléïdocycle irrégulier fermé d'ordre 20** est composé de 20 tétraèdres identiques dont les faces sont des triangles isocèles identiques. Son « premier » plan de symétrie est limité par un icosagone et son « second » plan de symétrie est limité par un décagone régulier.



De manière générale, chaque polygone à n côtés, avec n pair et $n \geq 6$, est composé de $2n$ triangles rectangles du type du triangle ABO rectangle en A (cf. Série de figures 3) d'hypoténuse BO = $\frac{L}{2}$, et de côtés AO = $\frac{l}{2}$ (apothème du polygone régulier) et AB = $\frac{c}{2}$, avec L, l et c des nombres positifs non nuls.

Dans ces triangles, l'angle au sommet entre $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA}$ est $\alpha = \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right)$ tel que :

$$\tan\alpha = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{l}{2}} \Leftrightarrow c = l\tan\alpha \quad \text{et} \quad \cos\alpha = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{L}{2}} \Leftrightarrow l = L\cos\alpha \quad \text{et} \quad \sin\alpha = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{L}{2}} \Leftrightarrow c = L\sin\alpha.$$



Série de figures 3 (faites avec GeoGebra) : les deux polygones limitant le plan de symétrie des kaléïdocycles irréguliers fermés d'ordres 6, 8 et 10

Or, dans un polygone régulier, l'angle au centre est égal à 2π divisé par son nombre de sommets. Donc ici, le « second » plan de symétrie étant limité par des polygones réguliers à $\frac{n}{2}$ sommets et d'angle au centre 2α, on $2\alpha = \frac{2\pi}{\frac{n}{2}}$ soit $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, et donc :

$$c = l\tan\frac{2\pi}{n} \quad \text{et} \quad l = L\cos\frac{2\pi}{n} \quad \text{et} \quad c = L\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Ainsi, en remplaçant n par des valeurs possibles et en utilisant quelques règles de trigonométrie (et des nombres complexes pour trouver φ), on obtient les résultats ci-après.

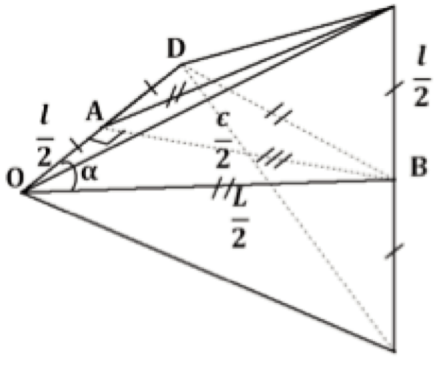
Ordre n du kaléïdocycle irrégulier fermé	α	c **en fonction de** l	l **en fonction de L**	c **en fonction de L**
6	$\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$	$c=l\tan\frac{\pi}{3}$ soit $c=\sqrt{3}l$	$l=\mathrm{L}\cos\frac{\pi}{3}$ soit $l=\frac{1}{2}\mathrm{L}$	$c=\mathrm{L}\sin\frac{\pi}{3}$ soit $c=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{L}$
8	$\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$	$c=l\tan\frac{\pi}{4}$ soit $c=l$	$l=\mathrm{L}\cos\frac{\pi}{4}$ soit $l=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{L}$	$c=\mathrm{L}\sin\frac{\pi}{4}$ soit $c=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{L}$
10	$\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{5}$	$c=l\tan\frac{\pi}{5}$	$l=\mathrm{L}\cos\frac{\pi}{5}$ soit $l=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\mathrm{L}$ donc $l=\frac{\varphi}{2}\mathrm{L}$ avec φ le nombre d'or	$c=\mathrm{L}\sin\frac{\pi}{5}$
12	$\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$	$c=l\tan\frac{\pi}{6}$ soit $c=\frac{\sqrt{3}}{3}l$	$l=\mathrm{L}\cos\frac{\pi}{6}$ soit $l=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{L}$	$c=\mathrm{L}\sin\frac{\pi}{6}$ soit $c=\frac{1}{2}\mathrm{L}$
…	…	…	…	…
20	$\frac{2\pi}{20}=\frac{\pi}{10}$	$c=l\tan\frac{\pi}{10}$	$l=\mathrm{L}\cos\frac{\pi}{10}$	$c=\mathrm{L}\sin\frac{\pi}{10}$ soit $c=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\mathrm{L}$ donc $c=\frac{1}{2\varphi}\mathrm{L}$ avec φ le nombre d'or
…	…	…	…	…
n	$\frac{2\pi}{n}$	$c=l\tan\frac{2\pi}{n}$	$l=\mathrm{L}\cos\frac{2\pi}{n}$	$c=\mathrm{L}\sin\frac{2\pi}{n}$

Mathématiquement, n pair et ≥ 6 peut être très grand mais pas infini. Si n était infini, on aurait $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\frac{2\pi}{n}=1$, et par suite $l=\mathrm{L}$. Or, si $l=\mathrm{L}$, il est impossible de construire un tétraèdre, donc n ne peut pas être infini. Concrètement, dans une réalité de construction en papier, n ne peut pas être très grand puisque plus n est grand, plus il est difficile de construire les tétraèdres et de les assembler avec du ruban adhésif.

Raisonnablement, on ne peut les construire que jusqu'à $n = 20$ et guère beaucoup plus.

Vérification par rapport à la taille des enveloppes

Si on pose L la longueur de l'enveloppe et l la largeur de l'enveloppe, on peut constater que nos formats DL et C6 ont les proportions attendues. En effet, si L = 22 cm, alors $l = \frac{1}{2}\text{L}$ soit l = 11 cm (rectangle de barlong), et si L = 16,2 cm, alors $l = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{L}$ soit l ≈ 11,455 129 86, et 11,4 cm est la troncature de cette valeur (Figure ci-contre faite avec Geospace).



Et voici enfin le problème des enveloppes de Rémi résolu.

On peut vérifier que les enveloppes de correspondance de formats ISO 269 ne permettent de construire que des kaléïdocycles irréguliers fermés d'ordres 6 et 8, en utilisant la méthode de pliage et d'assemblage du paragraphe 3. Ces enveloppes rectangulaires ont, en millimètre carrés, les largeurs par les longueurs suivantes : 917×1297 pour le format C0, 648×917 pour le format C1, 458×648 pour le format C2, 324×458 pour le format C3, 229×324 pour le format C4, 162×229 pour le format C5, 114×162 pour le format C6, 81×162 pour le format C7/6, 81×114 pour le format C7, 57×81 pour le format C8, 40×57 pour le format C9, 28×40 pour le format C10 et 110×220 pour le format DL. Toutes les largeurs sont le produit de leurs longueurs respectives par les coefficients $\frac{1}{2}$ ou bien $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ces deux coefficients, égaux respectivement à $\cos\frac{2\pi}{6}$ et à $\cos\frac{2\pi}{8}$, sont ceux des kaléïdocycles irréguliers fermés d'ordres 6 et 8.

La réalisation de kaléïdocycles, avec la méthode des enveloppes, a été l'occasion d'un véritable travail de géométrie avec des classes de Sixième, de Quatrième et de Troisième, selon les années et les collèges. La structure, puis la décoration avec la géométrie dynamique (*GeoGebra*) de ces anneaux de tétraèdres est l'occasion d'aborder le vocabulaire de la géométrie plane et de l'espace, de calculer et de démontrer. Le lien entre l'histoire des arts et les mathématiques (toujours avec la géométrie dynamique) est alors évident.