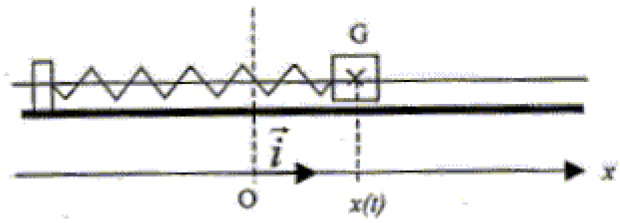
Mathématiques/Sciences Physiques
Séance N°4 – Les oscillateurs

Partie 1 – Ressort dans un plan horizontal

On s'intéresse au mouvement d'un solide de masse *m*, attaché à un ressort, dans le plan horizontal.
Le mouvement se fait sans frottements.



A l'instant $t = 0$, on écarte le solide de sa position initiale (d'abscisse $x_0 = 0$) pour le placer en x_m et on le lâche sans vitesse initiale.

1. Définir le référentiel, le système puis faire le bilan des forces.

2. Faire un schéma de la situation.

3. Citer puis appliquer la deuxième loi de Newton.

4. En remplaçant les différentes forces par leur expression, trouver une équation reliant $x(t)$ et $x''(t)$ en fonction de *t*. On obtient une équation différentielle du 2nd ordre sans second membre.

5. Complément de cours

Une équation dans laquelle l'inconnue est une fonction s'appelle une **équation différentielle**.
On note souvent *y* la fonction inconnue, y' et y'' ses dérivées première et seconde.

Par exemple, en cours nous avons résolu sans le dire l'équation différentielle $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

C'est-à-dire que l'on a recherché les fonctions *f*, dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Il s'agit d'une équation différentielle du 1er ordre car dans l'équation seule la dérivée première apparaît.

On a trouvé que ce problème possède une unique solution : la fonction *f* telle que : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) =$ .....

Pour résoudre le problème physique posé ci-dessus par le ressort dans le plan horizontal, on doit résoudre une équation différentielle du second ordre (c'est-à-dire que la dérivée seconde apparaît dans l'équation).

Intéressons-nous à l'équation différentielle : $y'' + \omega^2 y = 0$ où ω est un réel non nul (E_1).

a. Trouver tout d'abord parmi les fonctions de référence une fonction *f* telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R} : f''(t) + f(t) = 0 .$$

b. Par composition de cette fonction avec une fonction affine bien choisie, trouver une solution de l'équation différentielle (E_1).

c. Soit A un réel. On ajoute à (E_1) la condition $f(0) = \mathrm{A}$.

Modifier la fonction trouvée en **b.** pour que *f* vérifie à la fois (E_1) et cette condition.

❑ Vérification professeur

Pour tenir compte du fait qu'il existe aussi des conditions initiales sur la dérivée première, on admet qu'il existe trois réels A, ω et ϕ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} : f(t) = \text{..}$$

6. $x(t)$ peut donc s'écrire sous cette forme.

A partir du résultat de la question **5**, déterminer la valeur de ω en fonction de *k* et *m*.

7. Pour déterminer A et ϕ, on utilise les conditions initiales.

Que valent x et v à $t = 0$? ....

En déduire A et ϕ.

❑ Vérification professeur

Partie 2 – Un problème analogue : le pendule pesant simple

Un autre oscillateur mécanique qui fonctionne selon le même modèle est le pendule pesant simple.
Par analogie, on peut déterminer l'équation du mouvement de l'oscillateur, puis la solution.

8. Reprendre les questions **1** et **2** pour le pendule pesant.

9. On peut faire l'analogie en considérant trois paramètres caractéristiques de l'équation :

	Masse sur un ressort	Pendule pesant
Paramètre de liberté selon lequel le déplacement a lieu	x	θ
Paramètre influençant le mouvement	m	l
Paramètre de force	k	g

En déduire l'équation différentielle dans le cas du pendule pesant.

10. Déterminer la forme de la solution dans le cas du pendule pesant. Rechercher les valeurs des constantes en utilisant l'analyse réalisée pour le ressort.

En déduire l'expression de la vitesse angulaire $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \theta'$.

❑ Vérification professeur

11. Expérience : Enregistrer le mouvement d'un pendule pesant sur 20 périodes à l'aide d'une caméra avec les masses fournies, avec un angle initial inférieur à 20°, et en déterminant précisément la longueur du fil.

La vitesse du pendule est liée directement à la vitesse angulaire selon : $v = \ell \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.

En utilisant le logiciel LatisPro, vérifier l'expression de θ proposée dans la question **10**.

❑ Vérification professeur

Partie 3 – Lorsqu'on tient compte des frottements...

On considère maintenant que les frottements ne sont plus négligeables.
La vitesse restant faible, on considère que les frottements sont proportionnels à la vitesse.

12. Etablir l'équation du mouvement selon *x* de l'oscillateur dans le cas du ressort.

13. Soit α et β deux réels non nuls.
On s'intéresse à l'équation différentielle de 2nd ordre sans second membre : $y'' + \alpha y' + \beta y = 0 \quad (\mathrm{E}_2)$.
Soit *r* un nombre réel non nul. On pose $f(t) = \mathrm{e}^{rt}$.

a. Vérifier que *f* est solution de (E_2) si $r^2 + \alpha r + \beta = 0$.

b. En déduire une condition sur α et β pour que l'équation (E_2) admette deux solutions de la forme $t \mapsto \mathrm{e}^{rt}$

Même question pour une solution unique de la forme $t \mapsto \mathrm{e}^{rt}$.

Obtenir l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) est complexe.
Nous admettrons donc les résultats suivants :

<u>Complément de cours</u>

On appelle polynôme caractéristique de (E_2) le polynôme de degré 2 : $r^2 + \alpha r + \beta$.

❶ Si ce polynôme possède deux racines r_1 et r_2, alors la solution générale de (E_2) est : $t \mapsto \mathrm{C}_1\mathrm{e}^{r_1 t} + \mathrm{C}_2\mathrm{e}^{r_2 t}$ où C_1 et C_2 sont deux constantes dépendant des conditions initiales.

❷ Si ce polynôme possède une racine double r_1, alors la solution générale de (E_2) est : $t \mapsto (\mathrm{C}_1 t + \mathrm{C}_2)\mathrm{e}^{r_1 t}$ où C_1 et C_2 sont deux constantes dépendant des conditions initiales.

❸ Si ce polynôme possède deux racines complexes conjuguées $r_1 = a + \mathrm{i}b$ et $r_2 = \overline{r_1}$, alors la solution générale de (E_2) est : $t \mapsto \mathrm{e}^{at}\left(\mathrm{C}_1 \cos(bt) + \mathrm{C}_2 \sin(bt)\right)$ où C_1 et C_2 sont deux constantes dépendant des conditions initiales.

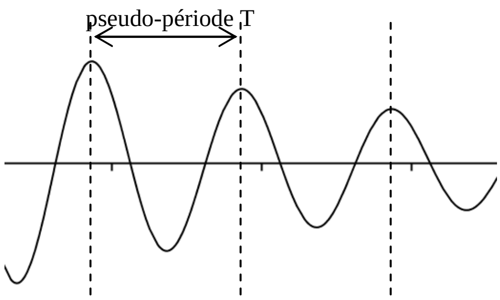
14. On s'intéresse ici au cas ❸ lorsque $\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}_2$.

a. Lancer le logiciel Geogebra.

- Définir deux curseurs *a* et *b*.
- Choisir des unités trigonométriques sur l'axe des abscisses
  [Menu Option – Graphic View – sous l'onglet x-axis sélectionner $\pi/2$].
- Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \mathrm{e}^{at}\left(\cos(bt) + \sin(bt)\right)$$

On observe la courbe d'une fonction pseudo-périodique. La pseudo-période T correspond à la distance en abscisse entre deux « sommets » consécutifs.



Si $a < 0$ alors on peut conjecturer : $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) =$ ....

Compléter le tableau suivant par lecture graphique :

b	Pseudo-période T
-4	
-2	
-1	
$-0,5$	
1	
2	
4	

Quelle formule peut-on conjecturer pour la pseudo-période T en fonction de b ? ....

b. Définir un curseur k prenant des valeurs entre 0 et 5 par pas de 0,01.
Tracer l'allure des courbes représentatives des fonctions $t \mapsto k\mathrm{e}^{at}$ et $t \mapsto -k\mathrm{e}^{at}$.

Faire varier la valeur de k et conjecturer la plus petite valeur de k pour laquelle $-k\mathrm{e}^{at} \leqslant f(t) \leqslant k\mathrm{e}^{at}$.

$$k \approx \text{..............}$$

Vérifier que pour tout réel t : $\cos(bt) + \sin(bt) = \sqrt{2}\cos\left(bt - \frac{\pi}{4}\right)$.

En déduire la double inégalité trouvée ci-dessus.

Retrouver la limite conjecturée en haut de cette page.

15. Par analogie, déterminer l'équation de mouvement du pendule.

16. Expérience : Proposer un protocole expérimental pour vérifier cette équation puis le réaliser. Commenter.

Partie 4 : Etude énergétique (traitée en cours de physique classique)

Dans le cas de la partie 3, à l'aide de LatisPro, déterminer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de pesanteur du pendule à chaque instant.

Tracer les courbes représentant les deux formes d'énergies puis leur somme (énergie mécanique).
Commenter en 10 lignes vos observations.