Mathématiques/Sciences Physiques
Séance N°5 – La relativité

PARTIE 1 : FAUT-IL OUBLIER LA PHYSIQUE DE NEWTON ?

Source : *Rondepierre, Tristan.* Faut-il oublier Newton ? – Site de l'académie de Lyon http://www2.ac-lyon.fr/enseigne/physique/spip.php?article429&lang=fr

La théorie qui précède celle d'Einstein, en mécanique, est la physique de Newton. Comme nous l'avons vu en classe, une des corrections apportées par la relativité concerne la mesure des durées.

Nous allons étudier, dans cette partie, dans quelle mesure la correction apportée par la relativité modifie le résultat des prévisions par rapport à la physique de Newton.

1. Le facteur γ défini par :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

permet d'évaluer l'écart entre la durée mesurée par une horloge embarquée et celle mesurée par une horloge immobile. On l'appelle facteur de Lorentz.

Calculer et rassembler dans un tableau les valeurs de γ pour des horloges liées aux systèmes suivants :

Horloge	Valeur de γ avec .... chiffres significatifs
Un TGV qui avance à 300 km.h^{-1} par rapport au sol terrestre	
l'Airbus A380, à la vitesse de 900 km.h^{-1} par rapport au sol terrestre	
la fusée Ariane 5, à la vitesse de 8000 km.h^{-1} par rapport au centre de la Terre	
Apollo 11, à la vitesse de 40 000 km.h^{-1} par rapport au centre de la Terre	
un proton sortant de l'accélérateur du PSI (Paul Scherrer Institut) à une vitesse égale à 79% de celle de la lumière dans le vide	
un proton sortant de l'accélérateur du LHC (Large Hadron Collider) à une vitesse égale à 99,9999991% de celle de la lumière dans le vide.	

2. On appelle *f* la fonction définie sur $]0\,;1[$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

a. On admet que cette fonction est dérivable sur son ensemble de définition.
Calculer $f'(x)$ à l'aide du logiciel de calcul formel Xcas ou de la calculatrice formelle.

Simplifier le résultat jusqu'à obtenir une écriture fractionnaire (sans exposant négatif et sans racine carrée au numérateur)

$$f'(x) = \text{..}$$

b. En déduire les variations de la fonction *f* sur son intervalle de définition.

c. Rappel : Approximation affine

Si f est une fonction dérivable en un point a de son ensemble de définition, alors si h est un nombre réel « proche de 0 » tel que $a+h$ appartienne à l'ensemble de définition, on a :

$$f(a+h) \approx \text{..................................}$$

Déterminer une approximation affine de la fonction f au voisinage de 0.

d. En déduire que si v est petit devant c, alors γ est proche de 1.

e. Tracer avec la calculatrice une allure de la courbe représentative de la fonction f.
Déterminer les valeurs de x (arrondies au millième) à partir desquelles $f(x)$ vérifie les conditions suivantes.

$f(x) > \ldots$	1,01	1,1	1,5	2
$x > \ldots$				

En déduire dans le tableau suivant les valeurs de la vitesse v pour lesquelles le facteur de Lorentz γ modifie de p % le résultat d'une mesure de durée par rapport à la prévision classique.

$p =$	1	10	50	100
$v \approx$				

3. Exploiter les valeurs obtenues pour déterminer, parmi les situations évoquées, celle(s) qui appartiennent au champ de validité de la physique de Newton et celle(s) qui ne sont correctement interprétées que par la physique d'Einstein.

4. Quelle propriété du facteur γ permet de comprendre que, dans de très nombreuses situations, la mécanique de Newton reste pertinente.

PARTIE 2 : LA VIE DES MUONS

Source : Horloge à muons – Site de l'académie de Besançon
http://missiontice.ac-besancon.fr/sciences_physique/
ekladata.com/EX7hL—p6VuhSypo7zeiTLE1p74.doc

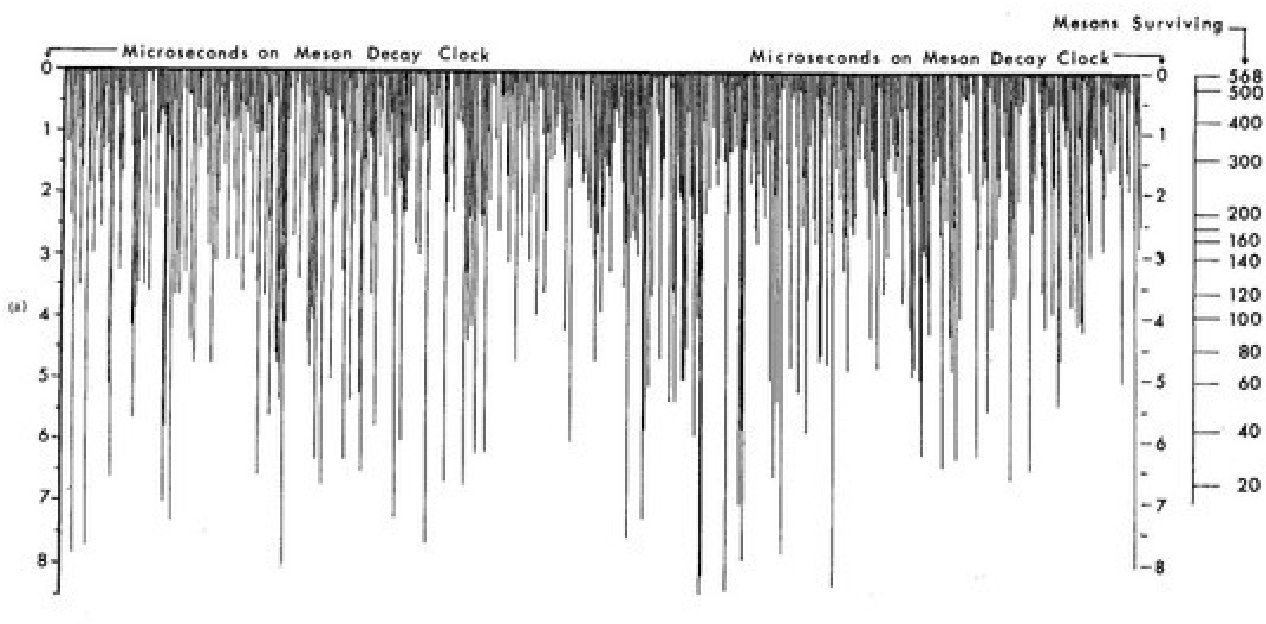
Les muons sont des particules électriquement chargées, de masse environ deux cent sept fois celle de l'électron. Pour cette raison, on les appelle parfois « électrons (ou positrons) lourds ». Ils sont instables. Ils se désintègrent en donnant des électrons ou des positrons, et des neutrinos.

Le processus de désintégration est intrinsèquement aléatoire : nous ne pouvons pas prédire la durée de la vie d'un muon donné. La probabilité qu'a un muon de se désintégrer à un moment donné est indépendante de l'instant où il a été créé de ceci quel que soit ce qui s'est passé pour lui précédemment. Autrement dit, un muon pris individuellement ne « vieillit » pas, seul un échantillon suffisamment important « vieillit ». L'unique grandeur constante que nous pouvons déterminer est la demi-vie du muon. On notera $\mathrm{N}(t)$ la population d'un groupe de muon à un instant *t*.

Les muons se forment lors de violentes collisions entre des particules cosmiques, principalement des protons provenant du Soleil, et des noyaux présents dans notre atmosphère. Les muons ainsi produits dans la haute atmosphère sont projetés à une vitesse proche de celle de la lumière vers la Terre. Ils interagissent peu avec la matière, et il faut plusieurs dizaines de centimètres de fer pour les arrêter. A leur passage, certains cristaux émettent de la lumière, c'est cette lumière qui permet de détecter les muons.

Le dispositif de Frisch et Smith permet de ne compter que les muons ayant une vitesse *v* telle que $0{,}9950 < \frac{v}{c} < 0{,}9954$, appelés par la suite « muons calibrés ». Leur demi-vie propre est $t_{1/2} = 1{,}52\ \mu\mathrm{s}$.

Dans un premier temps, à 1900 m d'altitude, Frish et Smith comptent pendant 1h les muons calibrés et ils déterminent la durée de vie propre de chaque muon. Ils construisent le graphique ci-dessous représentant la durée de vie propre (Microseconds on Meson Decay Clock) de chacun des muons comptés (Mesons surviving).



1. A partir du graphique ci-dessus représentant la durée de vie propre des $N_0 = 568$ muons calibrés, compléter le tableau suivant.

Δt (µs)	0									7,0	8,0
N	568	400	300	200	140	100	60	40	20		

2. Tracer à l'aide du tableur le graphe représentant N en fonction de *t*.

En déduire la demi-vie, c'est-à-dire, le temps du bout duquel la population de muon est égale à la moitié de la population initiale de muons N_0.

Demi-vie ≈ ....

Est-elle en accord avec la valeur de 1,52 µs donnée ?

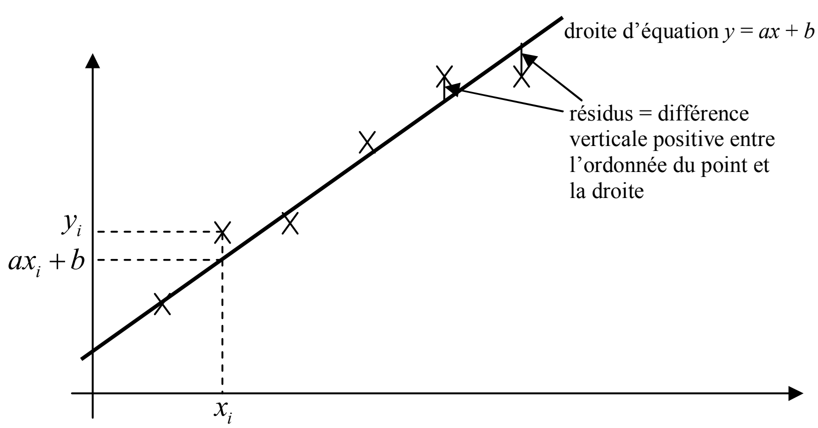
D'après l'allure de la courbe, quelle fonction mathématique pourrait modéliser cette loi ?

3. **a.** Compléter le tableau suivant avec les valeurs de Δt trouvées ci-dessus et les valeurs de $\ln(\mathrm{N})$.

Δt (µs)	0								
N	568	400	300	200	140	100	60	40	20
$\ln(\mathrm{N})$									

b. Tracer à l'aide du tableur le graphe représentant $\ln(\mathrm{N})$ en fonction de *t*.
Quelle semble être l'allure de la courbe obtenue ?

c. <u>La régression linéaire – Méthode des moindres carrés</u>



Lorsqu'on a plusieurs points proche de l'alignement dans un graphique, on peut procéder à une opération statistique appelée régression linéaire par la méthode des moindres carrés.

Dans l'exemple ci-contre, si on appelle $(x_i\,;\,y_i)$ les coordonnées des points, et $y = ax + b$ la droite passant « près » des points, alors on appelle <u>résidu</u> la différence positive entre la valeur observée y_i et l'approximation donnée par la droite $ax_i + b$.
Plus la somme des résidus est petite, plus l'approximation réalisée par la droite est bonne.

On admettra que la meilleure approximation est réalisée par la droite d'équation $y = ax + b$ telle que :

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2} \quad \text{et} \quad b = \overline{y} - a\,\overline{x}$$

Afin de calculer la valeur de a et b, on peut réaliser une feuille de tableur sur le modèle ci-dessous.

B	C	D	E	F	G	H
	xi	yi				
	t	ln(N)	(xi - moy(x))	(yi - moy(y))	(xi - moy(x))(yi - moy(y))	(xi - moy(x))^2
	0	6.342	-3.211111111	1.491	-4.787280741	10.31123457
		5.991				
		5.704				
		5.298				
		4.942				
		4.605				
		4.094				
		3.689				
		2.996				
					somme	somme
	Moy(x)	Moy(y)			(xi - moy(x))(yi - moy(y))	(xi - moy(x))^2
					a =	
					b =	

En vous aidant du tableur, calculer les valeurs arrondies au millième de a et b pour la série statistique $\left(t\,;\ln\left(\text{N}\right)\right)$.

$a \approx$ .... $b \approx$ ....

On peut en déduire que $\ln\left(\text{N}\right) \approx$ .... $t +$ ....

et donc :

$\text{N} \approx$ ....

4. Exprimer la distance d parcourue par un muon pendant une durée Δt. En déduire l'expression du temps de parcours en fonction des autres grandeurs.

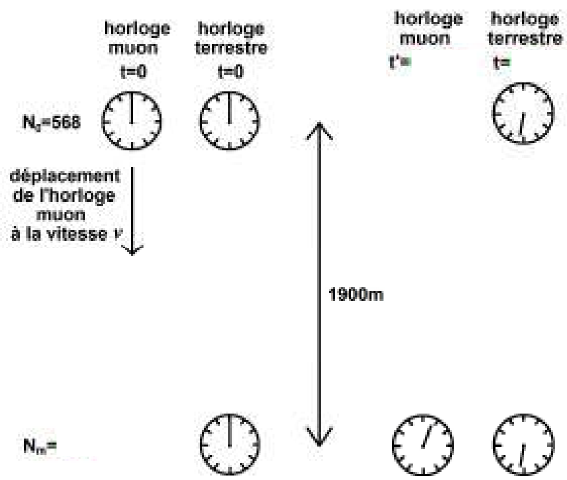
5. Sans tenir compte d'effet relativiste, sur les 568 muons calibrés, quel nombre de muons N_m devraient pouvoir parcourir la distance $d = 1900$ m en considérant qu'ils se déplacent à $c = 3{,}0 \times 10^8$ m/s?

6. Frish et Smith reprennent la même expérience au niveau de la mer, c'est à dire que les muons ont effectivement à parcourir une distance supplémentaire de 1900 m.

Ils trouvent $N'_m = 412$ muons au lieu du nombre calculé précédemment.
Comment expliquer cette différence ?

7. Déterminer sur le graphique le temps propre Δt_0 au bout duquel il reste N'_m muons.

8. Commenter ce schéma résumant l'expérience de Frisch et Smith en faisant intervenir le temps propre Δt_0.



9. Calculer le rapport γ obtenu à partir des résultats de Frish et Smith, en utilisant la dilatation du temps.

Comparer ce résultat à la valeur théorique de γ en prenant comme vitesse moyenne v des muons $v = 0{,}992 \times c$.

10. On considère une population $\mathrm{N}(t)$ de muons à un instant *t*. N_0 est la population initiale.
On considère un intervalle de temps pendant lequel la variation de population de muons est notée $\Delta\mathrm{N(t)}$.

a. De quel signe est $\Delta\mathrm{N(t)}$?

b. En réfléchissant à la situation, proposer deux grandeurs auxquelles $\Delta\mathrm{N(t)}$ pourrait être proportionnelle.

Déduire des deux questions précédentes une expression de $\Delta\mathrm{N(t)}$.

❑ Appel Professeur

c. Le nombre de désintégration par seconde est alors donnée par $\dfrac{\Delta\mathrm{N}(t)}{\Delta t}$.

Exprimer $\dfrac{\Delta\mathrm{N}(t)}{\Delta t}$ en fonction de $\mathrm{N}(t)$ uniquement.

11. Par passage à la limite, on a : $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\mathrm{N}(t)}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{dN}(t)}{\mathrm{d}t}$.

Pour un intervalle de temps Δt proche de 0, on peut faire l'approximation que $\dfrac{\Delta\mathrm{N(t)}}{\Delta\mathrm{t}} = \dfrac{\mathrm{dN(t)}}{\mathrm{dt}}$.

En déduire une équation différentielle sur $\mathrm{N}(t)$.

12. En utilisant ce qui a été fait en séance 4, on sait que la solution est sous la forme d'une ……………………………………..
En utilisant les conditions initiales, déduire une expression de $\mathrm{N}(t)$.

13. En utilisant cette solution et la définition du temps de demi-vie, proposer une expression du temps $t_{1/2}$.

14. Ecrire la solution sous la forme d'une droite. ....
Comparer l'équation avec celle trouvée lors la modélisation (question 3) ?