

Annexe 1. Le raisonnement de discrétisation

La discrétisation par minute

Pour EP1, si S_n est la quantité de sel *au début* de la $(n + 1)$ -ème minute, la concentration est $c_n = \frac{S_n}{100}$, donc il s'écoule $10c_n = \frac{10S_n}{100}$ pendant la minute, et il reste $S_{n+1} = S_n - \frac{10S_n}{100} = 0,9S_n$. Donc $S_{60} = S_0 (0,9)^{60}$.

Pour EP2, la concentration en sel *à la fin* de la $(n + 1)$ -ème minute (juste avant la vidange instantanée) est $c'_n = \frac{S_n}{100 + 10}$, donc il part instantanément $10c'_n = \frac{10S_n}{110}$ et il reste $S_{n+1} = S_n - \frac{10S_n}{110} = \frac{10}{11}S_n$; donc $S_{60} = S_0 \left(\frac{10}{11}\right)^{60}$.

La discrétisation par intervalles de temps de durée $\frac{t}{n}$

Ce sont exactement les deux mêmes raisonnements, à la seule différence que l'apport d'eau pure et le volume de départ du mélange, pendant une telle durée entre les instants $k\frac{t}{n}$ et $(k + 1)\frac{t}{n}$, est $v\frac{t}{n}$ (et non plus v). Par exemple, pour EP2 on obtient

$$S_{k+1} = S_k - \frac{S_k}{V + \frac{vt}{n}} \times \frac{vt}{n} = S_k \left(1 - \frac{\frac{vt}{n}}{V + \frac{vt}{n}} \right) = \frac{S_k}{1 + \frac{v}{V} \frac{t}{n}}$$

On peut de plus remarquer que dans EP1 la concentration utilisée est supérieure à la « véritable » concentration (variable) pendant l'intervalle de temps considéré ; on a donc majoré la quantité de sel évacué, et donc minoré la quantité de sel restant, et ceci à chaque étape. Donc $S(t) \geq G_n(t)$.

Pour EP2, la concentration utilisée est $\frac{S_k}{V + \frac{vt}{n}}$, alors que la concentration « réelle »

est entre $\frac{S_k}{V}$ et $\frac{S_{k+1}}{V} = \frac{S_k}{V + \frac{vt}{n}}$; on a donc minoré la concentration, donc majoré la

quantité de sel. On a donc $H_n(t) \geq S(t)$. Ainsi les deux expériences de pensée encadrent la fonction S cherchée.

Dit autrement, on a une « démonstration physique » des inégalités

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq \exp(-x) \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n},$$

lorsque $x \geq 0$.