Annexe 2 Une preuve élémentaire de la convergence des discrétisations

Une telle preuve pourrait être faite (par exemple en devoir) après une première étude de la fonction exponentielle, et donner une confirmation *a posteriori* pour les élèves du bien fondé de leur approche par discrétisation. Mais elle est difficile pour un élève de terminale, même « très bon ». On la donne donc essentiellement pour les collègues.

Supposons qu'on sache que $\mathrm{e}_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ converge, quand $n \to +\infty$, vers $\exp(x)$, pour $x \geq 0$, soit en partant de l'équation différentielle (mais il faut déjà disposer du concept de primitive), soit parce que c'est la construction choisie de l'exponentielle. Dans ce dernier cas, il est assez facile de montrer que c'est la solution de l'équation différentielle $y' = y$ valant 1 en 0. Ce point est admis dans [3], mais la formule du binôme montre que si $x \geq 0$ et $h \neq 0$ on a

$$\left| \frac{\mathrm{e}_n(x+h) - \mathrm{e}_n(x)}{h} - \mathrm{e}_{n-1}(x) \right| \leq |h| \sum_{k=1}^{n} \frac{(x+1)^k}{k!} \leq |h| \exp(x+1).$$

Puis on fait tendre n vers $+\infty$, et ensuite h vers 0, pour obtenir le résultat.

Alors la fonction $\mathrm{S}(t)$ introduite à la fin de l'activité de dilution du sel est clairement la fonction

$$\mathrm{S}(t) = \mathrm{S}(0) \exp\left(-\frac{v}{\mathrm{V}} t \right).$$

Mais il est facile de montrer l'inégalité

$$\left| \mathrm{e}_n(x) - \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right| \leq \frac{x^2}{n} \exp(|x|), \qquad (*)$$

qui montre que le premier membre tend vers 0 si n tend vers $+\infty$. Ceci est assez naturel : en développant $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ par la formule du binôme, on voit que pour k fixé le coefficient de $\frac{x^k}{k!}$, à savoir $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n^k}$, tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

On déduit immédiatement de ceci que $\mathrm{G}_n(t) \to \mathrm{S}(t)$ quand $n \to +\infty$.

Mais on a $\frac{\mathrm{G}_n(t)}{\mathrm{H}_n(t)} \leq 1$, donc, en posant $\frac{v^2 t^2}{\mathrm{V}^2 n^2} = u$,

$$0 \leq 1 - \frac{G_n(t)}{H_n(t)} = 1 - (1-u)^n$$

$$= u\left(1 + (1-u) + (1-u)^2 + \ldots + \left(1 - u^{n-1}\right)\right) \leq nu = \frac{v^2 t^2}{V^2 n} \to 0$$

quand $n \to +\infty$. Par suite $H_n(t) \to S(t)$ quand $n \to +\infty$.

Reste à montrer (*). On a

$$\left| e_n(x) - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right| = \left| \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!} \left(1 - \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\right) \right|$$

$$\leq \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{|x|^k}{k!} \frac{k-1}{n} \left(1 + \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^{k-1}\right) \right]$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!} k(k-1) = \frac{x^2}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{|x|^k}{k!} \leq \frac{x^2 \exp(x)}{n}.$$