

### 3 – Propagation avec sauts de sens aléatoire

#### 3.1 – Présentation du modèle

Après avoir étudié la propagation de rumeurs pépère et la propagation de rumeurs sans hasard, nous avons étudié comment une rumeur se propage avec l'utilisation du hasard, c'est-à-dire avec un saut de longueur fixe mais de sens aléatoire.

##### 3.1.1 – Intervention du hasard

Le principe de propagation est différent de celui utilisé pour la propagation sans hasard. En effet, le contaminateur initial se déplace, avec un nombre de sauts, noté  $k$ , établi au départ, vers la gauche ou bien vers la droite.

Pour savoir de quel côté le sujet contaminateur se déplace, nous lançons une pièce de monnaie, si elle tombe sur face, nous allons vers la droite et si elle tombe sur pile, nous allons vers la gauche. C'est ce principe qui nous permet d'utiliser le hasard.

Nous avons ainsi réalisé un schéma simple pour illustrer cette nouvelle règle.

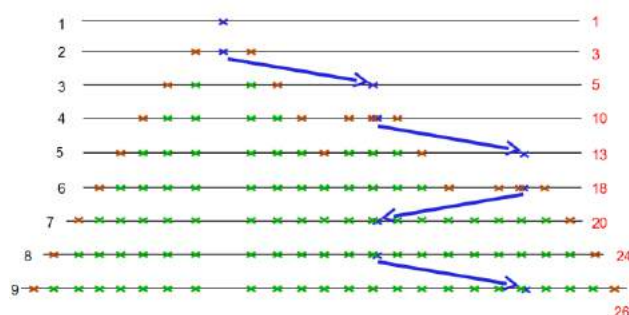


Figure 21 : Propagation avec sauts de longueur 6, de sens aléatoire

Nous avons symbolisé le déplacement du sujet contaminateur par une flèche.

Nous avons ensuite comptabilisé le nombre de contaminés à droite du schéma et inscrit le numéro de l'étape  $n$  à gauche.

Nous observons désormais l'utilisation du hasard car, au lieu de déplacer le sujet contaminateur toujours vers la droite ou toujours vers la gauche ici, il va, grâce à l'utilisation du hasard par la pièce, à droite, puis à droite, à gauche et retourne vers la droite.

##### 3.1.2 – Mise en œuvre

Après avoir expliqué cette règle de propagation à l'aide d'un schéma, nous avons réalisé une dizaine de simulations de sauts  $k$  que nous avons répertoriées dans un tableau. Chaque simulation de longueur  $k$  donnée est constituée de 15 étapes. Nous avons regroupé, pour les observer, 10 simulations de sauts d'une même longueur.

Dans le tableau en dessous, nous avons comptabilisé le nombre de personnes contaminées au fur et à mesure des étapes, donc du temps, ainsi que le sens que nous avons emprunté (c'est-à-dire si nous allions vers la droite ou vers la gauche).

Ce décompte nous a permis de comparer les résultats des simulations, le nombre de contaminés minimum, maximum, les différents changements de résultats en fonction du saut choisi ... Ce moyen de comptage est donc plus pratique qu'un simple schéma qui n'est pas utilisable pour un nombre d'étapes et de simulations importants.

|    | 1  | 2 | 3  | 4 | 5  |   |    |   |    |   |
|----|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|
| 0  | 1  | 1 | 1  | 1 | 1  |   |    |   |    |   |
| 1  | 3  | 3 | 3  | 3 | 3  |   |    |   |    |   |
| 2  | 5  | P | 5  | F | 5  | F | 5  | F |    |   |
| 3  | 9  |   | 9  |   | 9  |   | 9  |   |    |   |
| 4  | 11 | P | 11 | F | 11 | F | 11 | P | F  |   |
| 5  | 13 |   | 15 |   | 13 |   | 13 |   | 15 |   |
| 6  | 15 | P | 17 | P | 15 | P | 15 | F | 17 | P |
| 7  | 17 |   | 19 |   | 17 |   | 17 |   | 19 |   |
| 8  | 19 | F | 21 | F | 19 | F | 19 | F | 21 | P |
| 9  | 21 |   | 23 |   | 21 |   | 21 |   | 23 |   |
| 10 | 23 | P | 25 | P | 23 | F | 23 | P | 25 | F |
| 11 | 25 |   | 27 |   | 25 |   | 25 |   | 27 |   |
| 12 | 27 | P | 29 | P | 27 | F | 27 | F | 29 | F |
| 13 | 29 |   | 31 |   | 29 |   | 29 |   | 31 |   |
| 14 | 31 | F | 33 | F | 31 | F | 31 | F | 33 | P |
| 15 | 33 |   | 35 |   | 33 |   | 33 |   | 35 |   |

Figure 22 : Tableau de 5 tests avec un sens de propagation aléatoire où  $k=4$  et  $n=15$

### 3.1.3 – Observation d’un exemple

Après la réalisation du schéma et du tableau, nous avons reporté, comme exemple, les résultats du 6<sup>ième</sup> test dans un graphique où  $n$  est en abscisse. Le sens de lecture est différent puisque lorsque le sujet se déplace vers la droite, il se déplace sur le graphique dans les nombres positifs alors que s’il se déplace vers la gauche, il va vers les nombres négatifs.

Nous avons donc réalisé le tracé du sujet contaminateur d’après les résultats obtenus au 6<sup>ième</sup> test dans le tableau. Ainsi, le sujet va deux fois à droite, puis deux fois à gauche, deux fois à droite et une fois à gauche. Son trajet est représenté par le trait bleu.

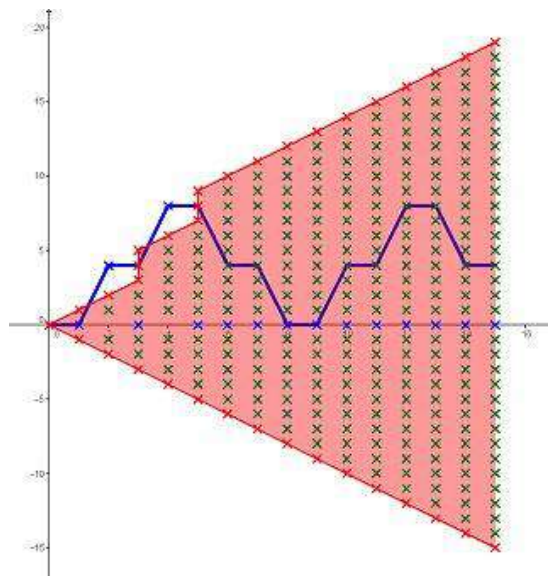


Figure 23 : Déplacement du contaminateur en fonction des étapes avec  $k = 4$  et  $n = 15$

### 3.1.4 - Instants record

L'utilisation du graphique permet la mise en évidence de nouveaux phénomènes. Nous remarquons la présence de deux instants records.

Un *instant record* est le moment où la propagation pépère, représentée par un cône constitué des points en vert sur fond rouge, est dépassée par la propagation du sujet contaminateur. Le cône de propagation est alors élargi puisqu'il y a de nouveaux contaminés plus loin (sur la droite dans ce cas).

Nous avons remarqué qu'au fur et à mesure du temps, il y a de moins en moins d'instants records.

### 3.2 – Utilisation des probabilités

Nous nous sommes alors intéressés aux différents chemins possibles que le sujet propagateur ou contaminateur initial peut prendre.

### 3.2.1 – Nombre de chemins

On peut voir en rouge ci-dessous un chemin possible, que peut prendre le propagateur initial, parmi tous les chemins possibles en bleu.

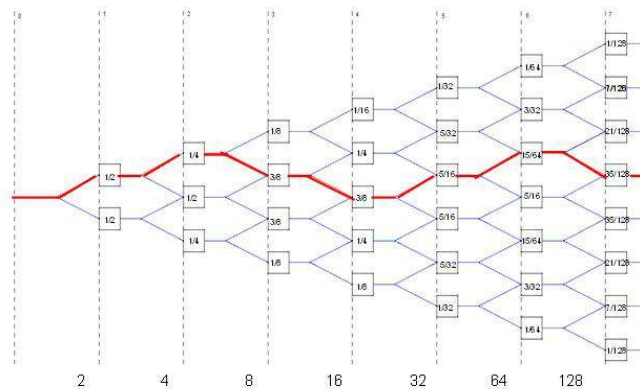


Figure 24 : Arbre et nombre de chemins possibles pour le propagateur initial

C'est le parcours étudié précédemment. A chaque fois que le contaminateur initial se trouve à une étape paire, il peut aller soit à gauche, soit à droite. A l'étape 2, il y a un chemin qui se divise en deux, ces deux nouveaux chemins vont à leur tour se diviser en deux pour porter le nombre de chemins, à l'étape 4, à 4, et ainsi de suite.

On peut trouver rapidement le nombre de chemins  $C_n$  pour toute étape  $n$ . Lorsque  $n$  est pair le nombre de chemins est doublé à la nouvelle étape.

Lorsque  $n$  est impair le nombre de chemins est conservé, puisque dans ce cas le contaminateur initial se déplace sur l'un des chemins créés précédemment. On a ainsi  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 2$ ,  $C_3 = 2$ ,  $C_4 = 4 = 2^2$ ,  $C_5 = C_4 = 4$ ,  $C_6 = 2 \times C_5 = 2 \times C_4 = 2 \times 2^2 = 2^3$ .

Par extension on conjecture  $C_{2n} = 2^n$ .

### 3.2.2 – Probabilités

Pour les étapes paires on pose  $n = 2M$ . Pour les probabilités, nous avons créés d'autres lignes imaginaires, nommées  $G$ , afin de pouvoir repérer ces probabilités.

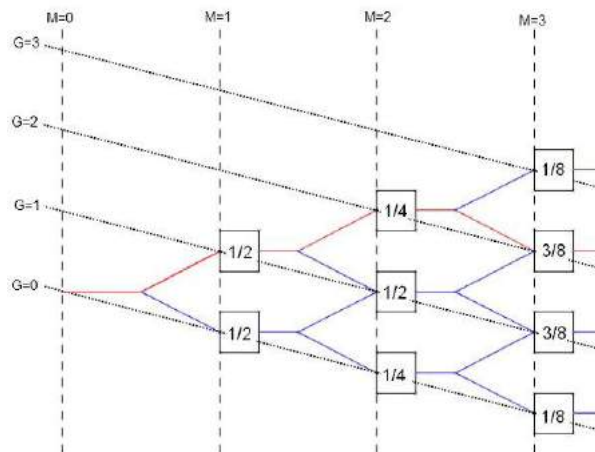


Figure 25 : Schéma pour le repérage des probabilités dans l'arbre

En chaque point  $(M, G)$  la probabilité est notée  $p_G^M$ . Le propagateur initial part de façon certaine de  $(0;0)$  donc  $p_0^0 = 1$ . Ensuite le chemin se sépare en deux avec une chance sur deux, à l'étape 2,

c'est-à-dire pour  $M = 1$  on a donc  $p_0^1 = p_1^0 = 1/2$ .

A l'étape 4, c'est-à-dire pour  $M = 2$  on a  $p_2^2 = p_2^0 = 1/4$  puisqu'il n'y a qu'un chemin qui va en (2;0) ou en (2;2) sur les quatre qui mènent à  $M = 2$ .

Pour (2;1), il y a deux chemins sur quatre qui y vont donc  $p_1^2 = 1/2$ , on retrouve ce résultat par le calcul suivant :  $p_1^2 = \frac{1}{2} \times p_1^1 + \frac{1}{2} \times p_0^1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ . On peut vérifier ensuite pour la probabilité d'arriver en (3;2) :

$$p_2^3 = \frac{1}{2} \times p_2^2 + \frac{1}{2} \times p_1^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$$

sur le schéma on vérifie qu'il y a bien 3 chemins sur les 8 qui mènent à ce point.

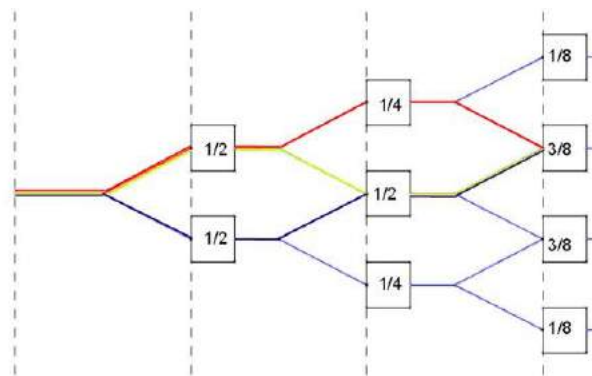


Figure 26 : Visualisation des 3 chemins menant au point (3;2)

Il reste à généraliser.

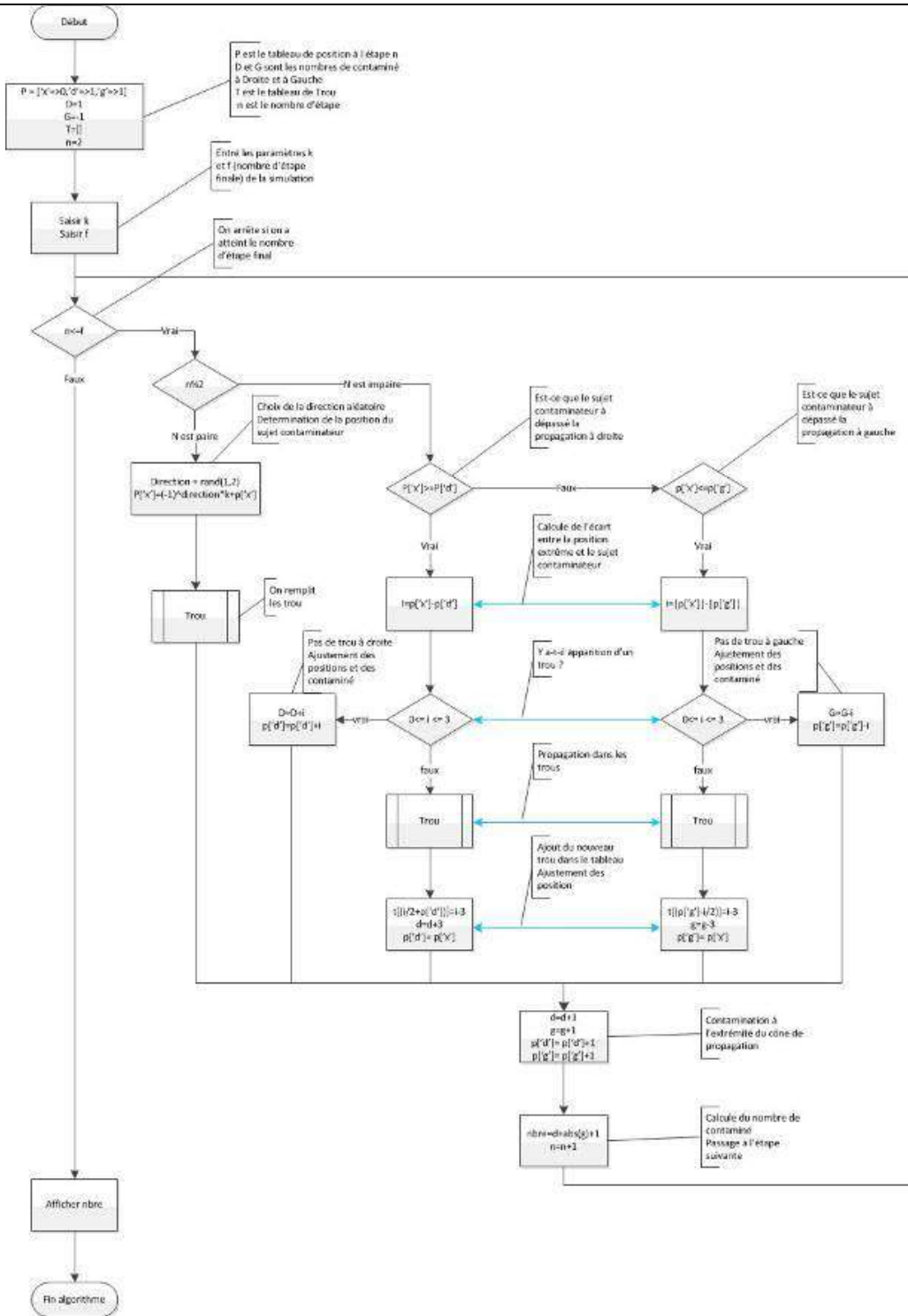
Etude de la vitesse de propagation

### 3.3 Vitesse de propagation de la rumeur :

Pour faciliter le travail d'observations des résultats et pour obtenir des résultats avec des plus grands nombres nous avons créés deux algorithmes permettant de simuler des déplacements au hasard

#### 3.3.1 – Algorithmes

Afin d'étudier l'influence des instants records sur la vitesse de propagation de la rumeur, nous avons créé deux algorithmes ci-dessous, permettant de simuler des propagations en faisant varier  $k$ .



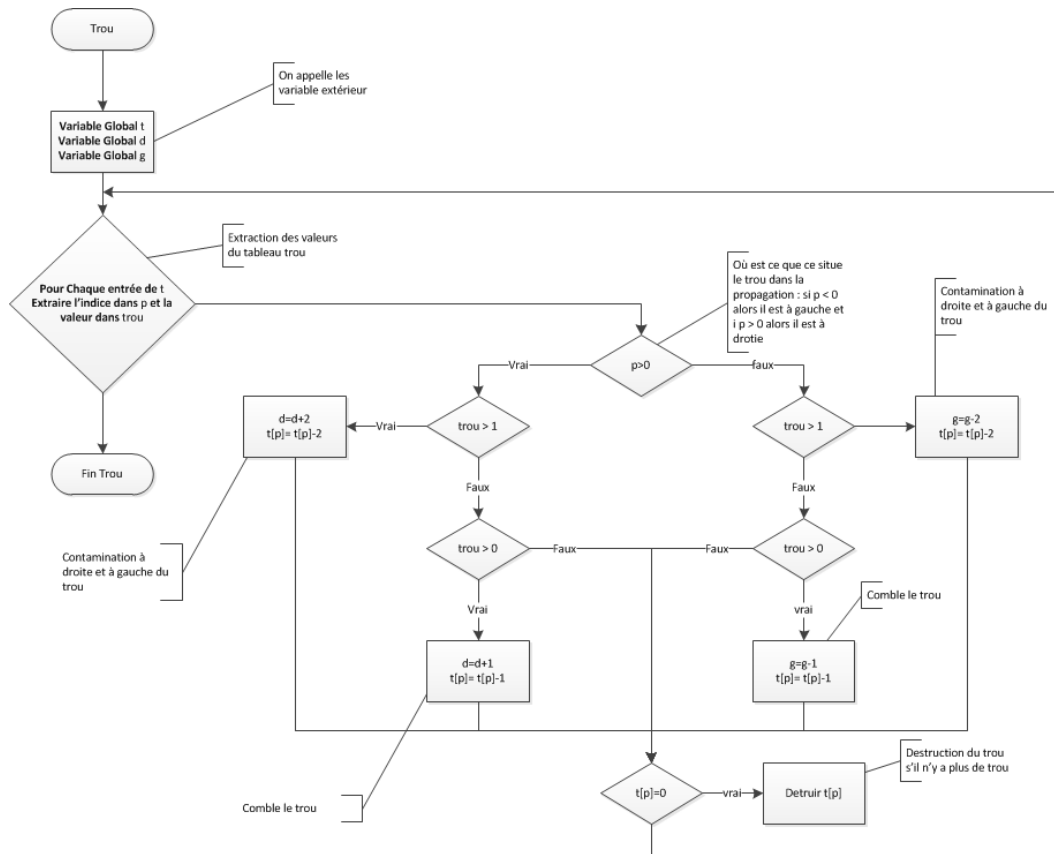


Figure 27 : Algorithmes permettant de simuler des déplacements au hasard du propageur initial

### 3.3.2 – Observation de résultats

Puis nous l'avons implanté sur ordinateur sous la forme d'un programme et nous avons effectué plusieurs simulations afin d'observer l'influence des paramètres. Un exemple de schéma obtenu est donné ci-dessous :

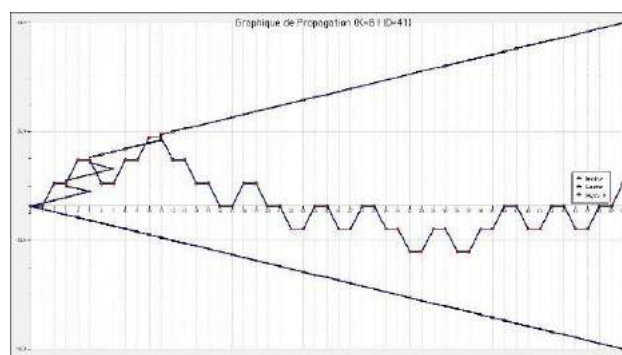


Figure 28 : Exemple de déplacement au hasard simulé

A la suite de l'élaboration du programme, nous avons simulé plusieurs propagations avec différentes valeurs du paramètre k. Afin de mieux analyser les résultats, nous avons synthétisé les différents graphiques sous la forme de nuages de points, avec en abscisse n, et en ordonnée  $F_n^k$ , comme sur la figure ci-dessous :

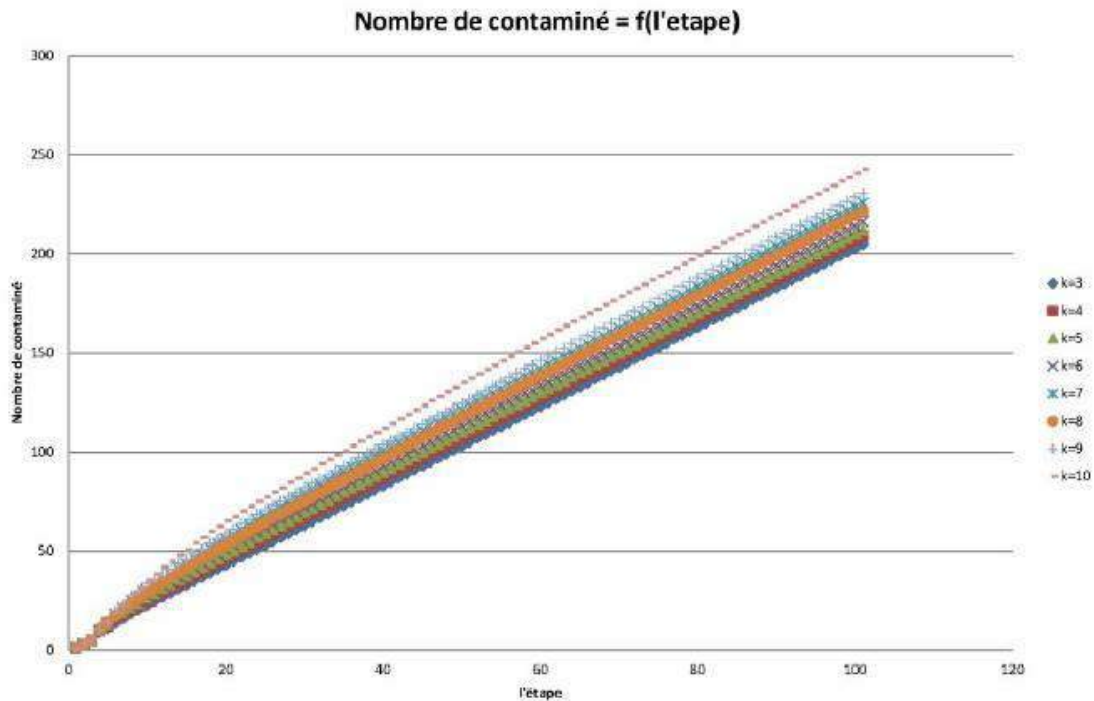


Figure 29 :  $F_n^k$  en fonction de  $n$ , selon plusieurs valeurs de  $k$

Nous avons observé que ces courbes semblaient pouvoir être approchées par des droites.

### 3.3.3 – Importance de la vitesse

Nous nous sommes intéressés à la vitesse de propagation :  $v(n, k)$ .

Le graphique ci-contre, traduit la vitesse de propagation en fonction de  $n$  et pour certaines valeurs de  $k$ .

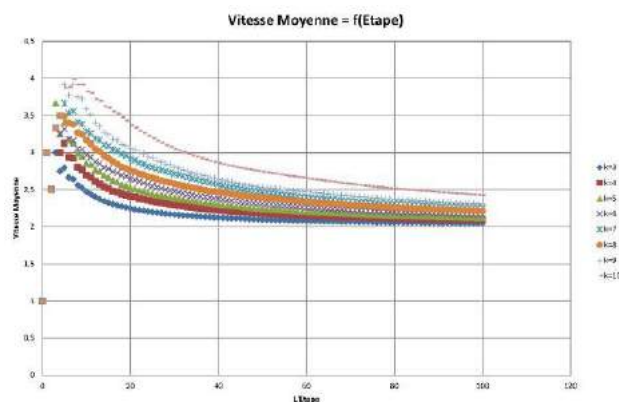


Figure 30 : Vitesse de propagation en fonction de  $n$  et de  $k$

On remarque que plus  $k$  est grand, plus la convergence est « lente ». Néanmoins, lorsque le nombre d'étapes est faible, on remarque aussi un pic avec une amplitude d'autant plus grande que  $k$  est grand.

Ce résultat explique la modélisation de la courbe du nombre de contaminés par une droite : la vitesse de propagation converge rapidement vers 2 ce qui donne l'impression d'une droite.

Pourquoi ce phénomène se produit-il ?

### 3.3.4 – Instants record

Lorsque le sujet contaminateur se déplace sur la ligne et dépasse une borne de la propagation, on appelle ce point, un *instant record*.

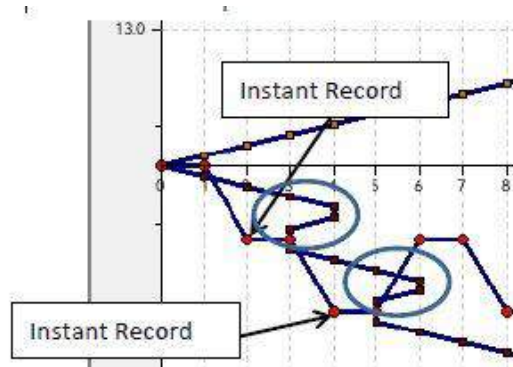


Figure 31 : Obtention d'instants records

Sur la figure, on remarque que le sujet contaminateur a dépassé une borne de la propagation à 2 instants, il y a donc 2 instants records. Ces instants sont à l'origine des trous dans la propagation (bulle bleue).

Sur cet extrait de graphique, on remarque qu'il y a 4 déplacements dont 2 sont des instants records. Statistiquement parlant, la fréquence pour qu'un instant record apparaisse est très forte au début de la propagation : elle est même sûre pour le premier déplacement dès que  $k \geq 5$ . Plus on avance dans la propagation, plus le nombre d'étapes est grand, plus la fréquence d'un instant record est faible.



Figure 32 : Répartition des instants records

Le graphique ci-dessus, illustre cette notion de fréquence. Au début de la propagation (à gauche du graphique dans le premier cadre) on remarque qu'il y a beaucoup d'instants records : sur ce graphique il y a 12 instants records sur 36 déplacements, la fréquence d'apparition des instants records dans le cadre rouge est environ de 37.5%.

Si on avance dans le graphique, on constate que le sujet contaminateur se déplace dans le cône de propagation, il n'y a pas d'instant record.

On remarque que d'autres instants records se produisent au niveau du second cadre : il y a 7 instants records sur 70 déplacements soit une fréquence locale de 10% (à l'intérieur du second cadre). De manière générale, il y a eu 20 instants records sur 180 déplacements soit une fréquence de 11% environ. On remarque bien que la fréquence diminue au fur et à mesure que la propagation avance.

Dans le troisième cadre, il n'y a pas d'instant record : le sujet contaminateur se déplace dans le cône de propagation. Donc au final dans ce graphique, la fréquence d'apparition d'un instant record est d'environ seulement 2%.



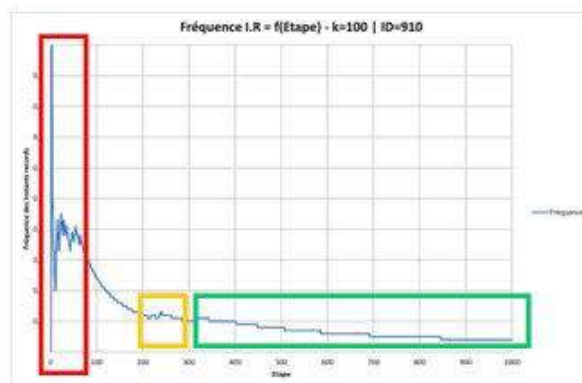


Figure 33 - Fréquence d'apparition des instants records en fonction de  $n$

Dans le graphique on voit bien que cette fréquence d'apparition  $f$  est assez élevée, avec,  $f \in [0,3;1]$  dans le premier cadre qui se situe au début de la propagation.

Plus la propagation avance, plus la fréquence diminue : dans le second cadre on a  $f \in [0,1;0,3]$ .

Dans le dernier cadre on a seulement  $f \in [0;0,1]$ .

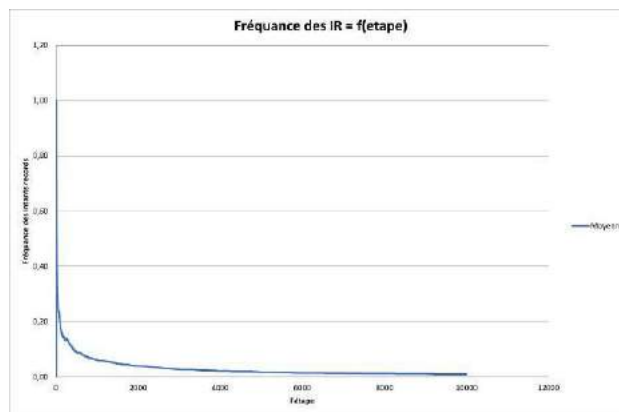


Figure 34 : Fréquence d'apparition des instants records en fonction de  $n$

Au final, on constate bien que la fréquence d'apparition des instants record converge vers 0, et donc qu'elle a de moins en moins d'influence sur la vitesse de propagation.

### 3.3.5 – Instants records et sauts

Comment la fréquence d'apparition des instants records est liée avec  $k$  et quelle est son impact sur la vitesse ?

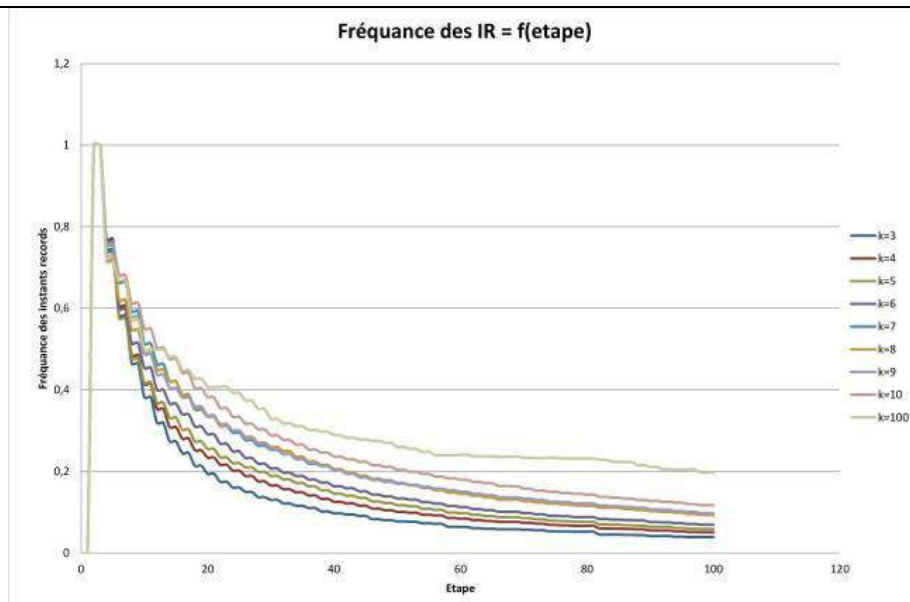


Figure 35 : Fréquence des instants record et valeurs de  $k$

Ce graphique ci-dessus est en lien direct avec un précédent car il représente l'évaluation des instants records en fonction de  $n$  et de  $k$ . On voit que plus  $k$  est grand, plus la fréquence est élevée, néanmoins on remarque aussi la convergence de la fréquence vers 0.

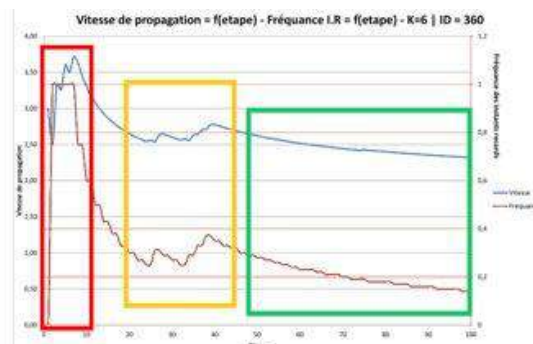


Figure 36 : Pour  $k = 6$  corrélation entre vitesse et fréquence

Ici on voit l'influence qu'ont les instants records sur la vitesse de propagation : dès de la fréquence de leur apparition augmente, la vitesse augmente, et lorsque celle-ci diminue, la vitesse diminue.



Figure 37 : Nombre de contaminés en fonction du nombre d'étapes

On peut en conclure que la vitesse de propagation est fonction de la probabilité d'apparition des instants records.

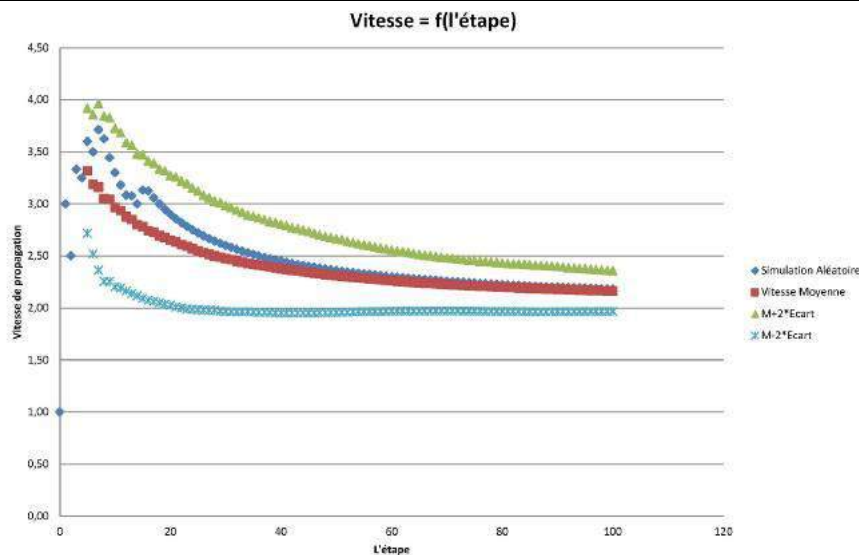


Figure 38 : Répartition des vitesses

Le graphique ci-dessus montre la répartition de la vitesse au sein d'un échantillon. La courbe foncée au centre représente la moyenne de cet échantillon encadré par  $\pm 2$  écarts type  $e$  (courbes claires en dessous et au dessus). La courbe discontinue au centre représente une simulation.

On constate que l'écart qu'il y a entre  $m + 2e$  et  $m - 2e$  diminue au fil des étapes pour converger vers 0. Comme le montre la courbe représentative d'une simulation, sa vitesse oscille dans l'intervalle  $[m - 2e; m + 2e]$  pour se rapprocher de la limite lorsque le nombre d'étapes augmente.

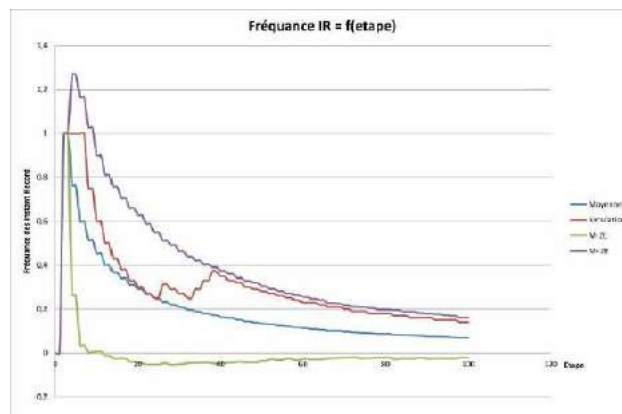


Figure 39 : Fréquence des instants records et vitesse

Dans le graphique au dessus, on remarque que la fréquence des instants records se répartit comme la vitesse, ainsi qu'une convergence vers 0.

### 3.3.6 – Conclusion

Au final, la vitesse de propagation est fonction de la fréquence d'apparition des instants records. Ces derniers sont eux même fonctions des paramètres  $k$  et  $n$ . Ainsi donc, les paramètres influant sur la propagation d'une rumeur sur une droite avec saut aléatoire sont la longueur du saut  $k$ , et l'étape  $n$  où on se situe.

On peut ainsi conclure que, quel que soit le sens que le sujet contaminateur va suivre :

- au début il y a une forte probabilité d'aller au-delà des contaminés par la rumeur père,
- mais à la fin, il ne pourra presque jamais se déplacer au delà des contaminés par la propagation père de la rumeur, car la probabilité d'instant records devient nulle lorsque le nombre d'étapes est très grand.

Le meilleur moyen de contaminer le plus de gens en très peu de temps et d'avoir un ou plusieurs sauts très grands au début, et ensuite de laisser la rumeur père faire le reste.