

GeoGebra, pour quoi faire ?

Marc Roux(*)

0. Qu'est-ce que GeoGebra ?

Ce mot-valise, contraction de géométrie et algebra, désigne d'abord un logiciel libre et gratuit, créé en 2002 par Markus Hohenwarter, alors doctorant à l'université de Salzburg (Autriche), pour pallier l'inexistence de logiciels traitant simultanément, avec interaction automatique, les trois points de vue : géométrie pure, géométrie analytique, algèbre ; très vite c'est devenu une communauté internationale, avec : des traductions en 43 langues (en français : 2004, par Noël Lambert⁽¹⁾, qui continue de réaliser au fur et à mesure les versions françaises successives et leurs aides en ligne) ; des Instituts GeoGebra : 47 dans le monde, dont 30 en Europe, et depuis peu un en France, à Rouen⁽²⁾ ; son animateur, Mathieu Blossier, précise que : « *L'institut GeoGebra de Rouen est aussi un groupe IREM, et fonctionne comme tel. Les buts principaux sont la formation des collègues à l'utilisation de GeoGebra (principalement par le biais du PAF et des journées APMEP), la production d'activités (par le biais du site de l'IREM de Rouen, ou sous la forme de brochures), et la participation au développement du logiciel. Ça pourrait ressembler à un groupe TICE comme on en trouve dans beaucoup d'IREMs, sauf qu'on se concentre sur GeoGebra.* »

Il y a aussi des ateliers, conférences et autres rencontres dans le monde entier ; une Newsletter, envoyée gratuitement par courrier électronique à quiconque s'y inscrit ; et surtout un site internet : <http://www.geogebra.org>, sur lequel on trouve, dans chacune des langues évoquées : le *téléchargement* du logiciel ; un *forum*, sur lequel toute question, de la plus naïve à la plus pointue, trouve réponse dans les meilleurs délais (Noël Lambert est aussi modérateur du forum en français) ; des documents d'introduction, des objets d'apprentissage ; un *Wiki*, où tout un chacun peut déposer astuces, exemples de réalisations, etc., et trouver une multitude d'Outils (ou macros), souvent fort utiles

Le logiciel est en constante évolution ; il a été notamment enrichi par : les « Outils créés par l'utilisateur » (ce qui, ailleurs, s'appelle macros), en mars 2009 (version 3.0) ; les Complexes, et un Tableur, en juin 2009 (version 3.2). Il y a, la plupart du temps, sur le site la possibilité de télécharger, en plus de la version stabilisée du moment, une ou plusieurs versions en développement, anticipant des modifications, mais pouvant présenter encore des imperfections et des insuffisances. Ainsi à l'heure où j'écris, je commence à explorer la version 4.0 beta⁽³⁾, qui apporte, entre autres, une fenêtre Calcul formel, les fonctions à deux variables, et de petites nouveautés

(*) marc.roux15@wanadoo.fr

(1) Merci à lui de m'avoir fourni maints précieux renseignements.

(2) http://www.geogebra.org/en/wiki/index.php/GeoGebra_Institute_of_Rouen

(3) Adresse de téléchargement : <http://www.geogebra.org/webstart/4.0/geogebra-40.jnlp>

comme : *Stylo* (tracé de courbes à main levée, à la souris), *polygone indéformable*, *ligne brisée*, ... ainsi que la version 5.0 beta⁽⁴⁾, qui inclut en outre une fenêtre 3D (géométrie dans l'espace) ; les versions disponibles quand vous lirez ceci ne seront sans doute déjà plus les mêmes. Le maître d'oeuvre de l'ensemble reste Markus Hohenwarter, mais il n'est plus le seul développeur : par exemple, le module 3D a été confié à Mathieu Blossier.

Dans le cadre du présent Dossier Géométrie, je me cantonnerai dans ce qui suit aux applications géométriques du logiciel (applications en géométrie *plane*, par manque de familiarité avec la toute récente version 3D), réservant à une autre occasion l'exploration de ses fonctionnalités en analyse, algèbre, statistiques et probabilités, voire logique...

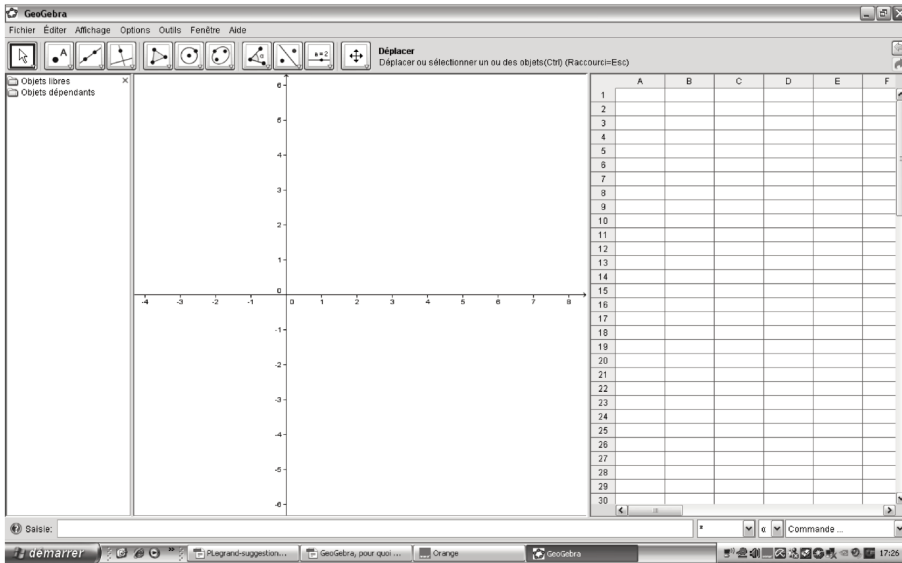
Tous les logiciels de géométrie permettent la construction de toute figure courante de géométrie plane, remplaçant compas, règle, rapporteur, équerre ; remplacement avantageux car il apporte plus de précision et débarrasse de tout souci de maladresse manuelle. Mais leur intérêt essentiel réside dans l'aspect *dynamique* : en faisant varier l'emplacement des points libres et/ou la valeur des paramètres numériques, ils distinguent clairement les propriétés (alignements, isométries, ...) qui se déduisent des hypothèses de celles qui ne se réalisent que dans des cas particuliers. Un seul fichier remplace ainsi une série de figures faites à la main, et évite d'oublier un cas de figure. Et on ne risque plus de perdre du temps à essayer de démontrer une assertion qui n'est pas toujours vraie.

Il n'est, bien sûr, pas question de passer ici en revue toutes les situations où le logiciel peut se montrer utile ; plusieurs volumes de la taille de ce bulletin seraient nécessaires. Pour la même raison, je ne donnerai pas non plus un mode d'emploi, avec description de toutes les fonctionnalités ; mieux vaut les découvrir par soi-même ; la méthode qui m'a assez bien réussi pour les apprivoiser, moi l'ignare en informatique, c'est de partir de problèmes *mathématiques* ; voulant construire tel ou tel objet précis, j'en ai cherché les moyens d'abord dans les menus déroulants et dans la liste des commandes, puis si nécessaire dans l'aide en ligne, et en cas d'échec j'ai posé des questions sur le forum. Mais beaucoup de procédés se devinent sans mal, car, et c'est ce qui, dès l'abord, m'a particulièrement séduit, *le vocabulaire et les notations sont très proches de ceux du cours de mathématiques* : par exemple, on obtient la dérivée d'une fonction f déjà créée en tapant *dérivée[f]*, et celle-ci sera automatiquement nommée f' .

Dans la suite je me contenterai de montrer en particulier l'intérêt de quatre fonctionnalités de ce logiciel : les *curseurs*, les *outils créés par l'utilisateur*, les *listes*, le *tableur* (et de leur combinaison). Mais auparavant, observons une feuille de travail vierge (Fig. 0) :

(4) Adresse de téléchargement :

<http://www.geogebra.org/webstart/5.0/geogebra-50-external-jogl>
ou <http://www.geogebra.org/webstart/5.0/geogebra-50.jnlp>



On y distingue : en haut, une série de menus déroulants ; à gauche, la fenêtre algèbre ; à droite, le tableur ; entre les deux, la fenêtre géométrie ; en bas, de gauche à droite : le champ de saisie, et trois menus déroulants proposant respectivement : de nombreuses fonctions et des symboles comme ∞ , les connecteurs logiques, `random()`, etc ; l'alphabet grec ; les commandes disponibles, classées par ordre alphabétique⁽⁵⁾. En déroulant le menu « affichage », on peut faire disparaître ou apparaître ces différentes zones selon les besoins (dans la version 4.0 beta, on peut afficher de plus une fenêtre Calcul formel, et dans la 5.0 beta, s'y ajoute une fenêtre 3D) ; on peut de même afficher ou non les axes et la *grille* (quadrillage de côté variable selon les unités), dans la fenêtre géométrie. Celle-ci reste toujours ouverte (mais peut être rétrécie à volonté, en élargissant les autres). Tout objet susceptible de représentation géométrique y apparaît, quel que soit son mode de création : par exemple, taper $=x^2$ dans une cellule du tableur fait apparaître la parabole. Les objets proprement géométriques (points, polygones, coniques, ...) se créent aussi directement à la souris : explorer les menus déroulants du haut de l'écran.

Quelques indications pour les débutants : pour les décimaux, utiliser le point et non la virgule ; les exposants se notent avec la touche \wedge , les indices avec le « tiret bas » $_$, la racine carrée avec *sqrt*, la multiplication avec $*$; par exemple, pour créer la fonction f_n définie par $f_n(x) = \frac{1}{n} \sqrt{(x - \cos(x))^n}$ (à condition qu'ait déjà été défini un nombre n , par exemple par un curseur) il suffit de taper dans la zone de saisie : `f_n(x)=1/n*sqrt((x-cos(x))^n)`.

(5) Il est équivalent de cliquer sur une de ces commandes, ou de taper son nom dans la fenêtre de saisie.

1. Les curseurs ⁽⁶⁾.

Sous GeoGebra, un curseur se crée en un clic, à partir d'un des menus déroulants ; on peut changer son nom, régler à loisir ses bornes et son pas ; ensuite il se manipule à la souris ou avec les touches \rightarrow et \leftarrow ; c'est l'outil par excellence pour explorer toute situation dépendant d'un (ou plusieurs) paramètres numériques ; avec les simples déplacements de points à la souris, les curseurs font des mathématiques en général et de la géométrie en particulier de véritables sciences expérimentales. J'ai donné des exemples dans « Des micro TP avec les curseurs » (BV n° 473) et dans « L'éclosion du dragon » (BV n° 491). En voici un autre, qui n'a pas été conçu spécialement puisqu'il est extrait d'un sujet de concours Mines P⁽⁷⁾ :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère les droites

D_λ d'équations $(1 - \lambda^2)x + 2\lambda y + (\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer l'ensemble des points M par lesquels il passe (au moins) une droite D_λ .
2. Quel est l'ensemble des points M par lesquels il passe deux droites D_λ et D_μ perpendiculaires.

Pour trouver expérimentalement la réponse à 1., j'ai créé un curseur λ , puis la droite D_λ (il suffit de taper, dans le champ de saisie, D_λ : suivi de l'équation, exactement comme elle est donnée dans l'énoncé). La droite apparaît ; je manipule plusieurs fois le curseur, d'une borne à l'autre (j'ai choisi $-20, 20$) ; la droite pivote. J'ai d'abord l'impression qu'elle balaie tout le plan, puis il me semble qu'il y a une région qu'elle évite en lui tournant autour ; optimiste quant à la facilité de l'exercice (principe du rasoir d'Ockham⁽⁸⁾ !), j'espère qu'il s'agit d'un disque ; je crée donc un cercle de centre A, passant par B (A et B points libres) ; par tâtonnements, j'amène ce cercle jusqu'à une position où la droite lui reste tangente quand λ varie ; il a alors pour centre A(2;1), pour rayon 1. L'ensemble cherché est le plan privé de l'intérieur de ce cercle (C).⁽⁹⁾

Pour la question 2, je crée de même un deuxième curseur μ , et la droite D_μ ; je joue des deux curseurs pour amener les deux droites à être (approximativement) perpendiculaires ; elles sont, bien sûr, toutes deux tangentes à (C), et je vois sans effort ce que j'aurais pu trouver au prix d'un peu de réflexion : leur intersection

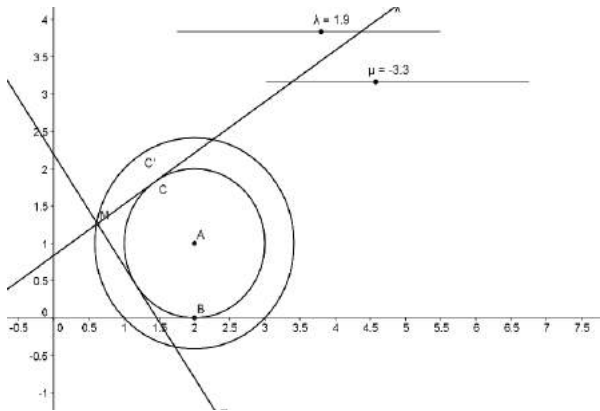
(6) Un curseur est une image, sur l'écran, qui permet de faire varier, à l'aide de la souris, la valeur d'un nombre, entre deux bornes, avec un pas donné. Mathématiquement c'est donc un quadruplet formé d'une variable, de deux nombres relatifs et un nombre strictement positif. Mais le curseur porte le même nom que la variable.

(7) D'après *Les grands classiques de mathématiques*, D. Guinin, B. Joppin, M. Lepez, éditions Breal 1995

(8) Principe de raisonnement que l'on attribue au frère franciscain et philosophe Guillaume d'Ockham (XIV^e siècle), mais qui était connu et formulé avant lui : « Les multiples ne doivent pas être utilisés sans nécessité » (« pluralitas non est ponenda sine necessitate »). (Wikipedia)

(9) Un relecteur me souffle *a posteriori* que j'aurais pu, plus simplement, activer la Trace de D_λ .

parcourt le cercle (C') de centre A, de rayon $\sqrt{2}$ (lieu des points d'où l'on voit (C) sous un angle droit) (Fig. 1) :



Ne reste « plus qu'à » démontrer ces résultats, ce que je laisse au lecteur. Bien entendu, les résultats expérimentaux sans démonstration n'auraient guère rapporté de points aux candidats du concours ; mais il est toujours plus « confortable » de savoir à l'avance ce qu'on doit trouver, au lieu de se lancer dans des calculs en aveugle.

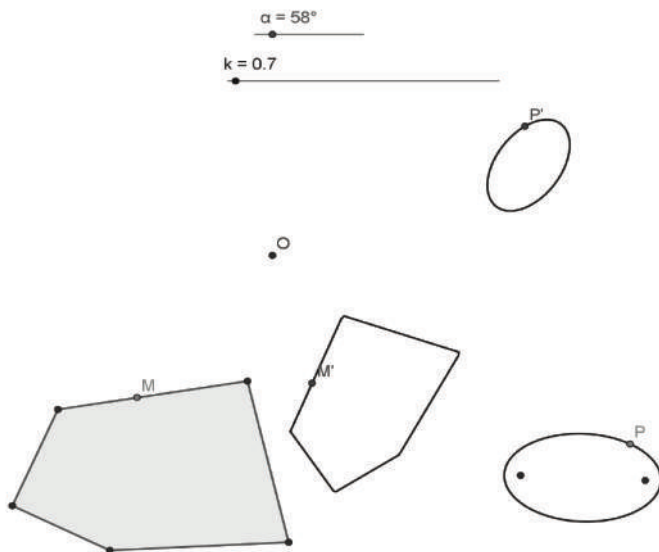
2. Les Outils⁽¹⁰⁾ créés par l'utilisateur : intérêt pratique et pédagogique.

Pour créer un Outil, on fait la construction sur un cas particulier, puis on l'enregistre en précisant quels sont le ou les objets finaux et le ou les objets initiaux ; les outils enregistrés dans un dossier séparé pourront être ouverts dans tout fichier GeoGebra ultérieur. Dès le collège, rien de plus facile que créer, par exemple, l'outil Orthocentre : on crée un triangle ABC, les droites supports des côtés, les perpendiculaires en A à (BC), en B à (CA), leur point d'intersection H (au passage, on vérifie que la hauteur issue de C passe aussi par H) ; on choisit pour objets initiaux de l'Outil les points A, B, C, pour objet final le point H (ainsi que, si on le désire, les trois hauteurs), et le tour est joué ! Les concepteurs de GeoGebra auraient pu intégrer cette commande dans le logiciel (il y a la commande Centre de gravité), ils ne l'ont pas fait, c'est plutôt heureux à ce niveau car l'élève qui a réalisé lui-même l'Outil a plus de chances de mémoriser son principe, et il pourra tout de même gagner du temps en évitant de refaire la construction complète pour chaque figure où un orthocentre apparaît.

À un niveau un peu plus élevé, créer des Outils pour pallier l'absence de certaines commandes est un bon exercice d'imagination et de débrouillardise. Par exemple, dans un des menus déroulants, on trouve Rotation, Homothétie (qui s'appliquent à

(10) Un Outil est en fait un petit programme, qui, à un ou plusieurs objets initiaux, associe un ou plusieurs objets finaux ; mais il n'est nul besoin de savoir écrire un programme pour créer un Outil.

divers objets : points, droites, coniques), mais pas similitude ; créer un Outil Similitude agissant sur les points est facile : on construit l'image A' d'un point A par une homothétie suivie d'une rotation de même centre, on prend comme objet final A' , objets initiaux A , le centre, l'angle, le rapport ; mais cet outil n'agira que sur les points, pas sur les figures ; pour contourner cette difficulté on placera A sur la figure dont on cherche l'image, et après obtention de A' , on demandera le Lieu de A' , en fonction de A ; les formes des figures de départ, la position du centre, les valeurs de l'angle et du rapport (pilotées par des curseurs) peuvent être modifiées à loisir, même après avoir fait la construction (Fig. 2 : ici $\alpha = 58^\circ$, $k = 0,7$, centre O ; les sommets du « grand » polygone, les foyers et le point de la « grande » ellipse, le point O sont des points libres) :



D'autre part, pour certains travaux, on sera amené à créer des Outils propres à la situation étudiée, si celle-ci appelle la répétition d'une même construction ; voir un exemple en annexe.

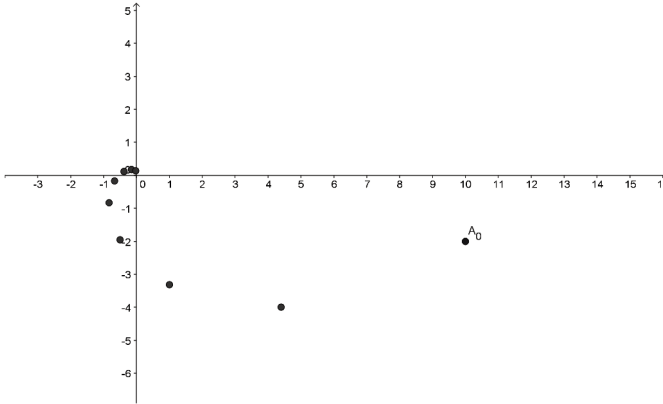
3. Les listes.

Les listes peuvent être créées de trois façons :

- en tapant dans le champ de saisie, entre accolades et séparés par des virgules, des objets déjà créés, qu'ils soient ou non de même nature : nombres, points, segments, cercles, ... ou même autres listes préexistantes ;
- par la commande Séquence⁽¹¹⁾ : on entre dans le crochet une expression dépendant d'une variable entière, le nom de la variable, ses valeurs minimale et maximale ; bien que ces listes soient forcément finies, ceci est un moyen précieux

(11) Pour des raisons mystérieuses, dans le menu « Commandes » on ne trouve pas « Séquence » à sa place alphabétique, mais à la fin des « S ».

d'exploration des suites définies fonctionnellement (que leurs éléments soient des nombres, des points, des segments, ...) ; voici par exemple, en utilisant les complexes, ce que donne Séquence[A₀*(0.5-0.3i)^k,k,1,8] ; quel élève pourra douter que la suite de points A_n d'affixes z₀(0.5 - 0.3i)ⁿ converge vers l'origine ? (Fig. 3) :

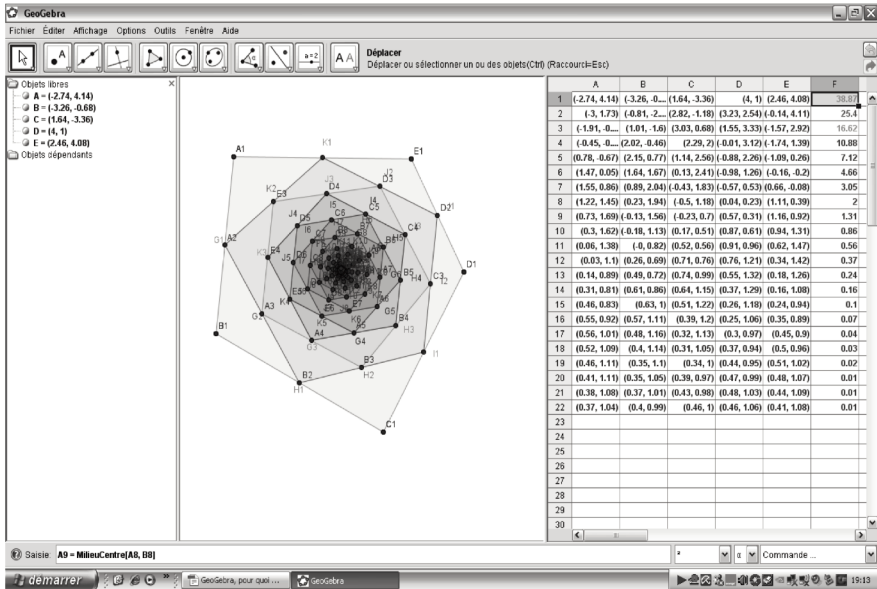


- pour mémoire : par la commande ItérationListe⁽¹²⁾, pour les suites récurrentes ; mais ceci n'est applicable qu'à des suites numériques réelles.

4. Le tableur.

Utiliser un tableur en géométrie ? C'est possible ! Et pas seulement en y entrant des coordonnées de points, quand il s'agit du tableur de *GeoGebra*. Ce qui fait sa spécificité, c'est que chacune de ses cellules peut contenir n'importe quel objet reconnu par ailleurs par le logiciel : nombres, points, segments, polygones, coniques, etc., et aussi listes de nombres, listes de points, etc. J'ai largement utilisé cette grande souplesse dans « L'éclosion du dragon » (BV n° 491). Voici un exemple plus élémentaire : supposons que nous voulions étudier les polygones successivement obtenus en prenant pour sommets les milieux des côtés du précédent. Nous dessinons le premier dans la fenêtre géométrie, par exemple un pentagone ABCDE ; dans la cellule A1 du tableur, tapons =A : le couple de coordonnées de A s'y inscrit, et se modifie en temps réel si nous déplaçons A ; de même entrons B en B1, ..., E en E1 (et, dans la fenêtre géométrie, les points sont renommés A1, B1, etc). En A2 nous tapons alors : =MilieuCentre[A1,B1], et recopions en « tirant » horizontalement jusqu'en D2 ; en E2 tapons de même =MilieuCentre[E1,A1] ; sélectionnons alors toutes les cellules de la ligne 2, et tirons vers le bas : tous les points désirés apparaissent. Pour y voir plus clair, en F1 on tapera =Polygone[A1,B1,C1,D1,E1], et on tirera vers le bas : tous les polygones apparaissent dans la fenêtre graphique ; de plus, les nombres qui se lisent dans la colonne F du tableur sont les aires de ces polygones ; en déplaçant les points A,B,C,D,E on sera amené à conjecturer que dans tous les cas, cette aire décroît et tend vers zéro (Fig. 4) :

(12) Syntaxe : ItérationListe[f,a,n] renvoie les n premiers termes de la suite définie par $u_0 = a, u_{n+1} = f(u_n)$.



5. Nul n'est parfait.

Et GeoGebra ne fait pas exception. Chaque nouvelle version corrige des lacunes ou défauts, en laisse d'autres en l'état, et peut en faire apparaître de nouveaux. Les manques ressentis font d'ailleurs partie de la subjectivité de chaque utilisateur :

- Plusieurs collègues estiment que l'*aide* n'est pas très facile à utiliser ; il est vrai que, par exemple, dans la rubrique « coordonnées », il n'est rien dit des coordonnées polaires ; il faut penser à consulter « points et vecteurs » pour apprendre que, pour créer un point de coordonnées polaires données, il suffit de séparer celles-ci par un point-virgule au lieu d'une virgule ; et on doit découvrir par soi-même qu'un clic droit sur un point déjà créé ouvre la possibilité de changer de type de coordonnées.

J'aimerais aussi trouver dans l'aide des précisions sur la création d'Outils : celle-ci pose parfois, mais pas toujours, problème lorsqu'un objet initial n'est pas un objet libre ; quels sont les objets initiaux utilisables ? Enfin, cette aide n'est pas incluse dans le logiciel, elle est disponible en ligne ; mais on peut la télécharger séparément à l'adresse <http://www.geogebra.org/help/docufr.pdf>

- J'ai signalé plus haut l'absence de quelques commandes géométriques ; certes, d'un point de vue historico-pédagogique, il pourrait être intéressant de recréer les conditions d'Euclide en travaillant avec les seules commandes « Droite passant par deux points » (la règle) et « Cercle (centre,point) » (le compas) ; je pense néanmoins qu'il serait préférable d'intégrer au logiciel quelques commandes supplémentaires ; on trouve déjà « Inversion », « Cercle osculateur », « Courbure », il pourrait bien y avoir au moins « Orthocentre », « Cercle

inscrit », « *Cercle exinscrit* », « *Similitude* », « *Affinité* », « *Projection* », « *Barycentre* »⁽¹³⁾ (de n points pondérés), « *Moyenne pondérée* », ...

- Personnellement je regrette que les *lieux* ne soient pas reconnus comme objets géométriques à part entière, qu'on ne puisse pas leur appliquer les transformations, tracer leurs tangentes, etc ; mais peut-être ceci soulèverait-il des difficultés informatiques insurmontables ?
- Ne serait-il pas possible que les Outils créés (ou téléchargés) par un utilisateur donné soient disponibles par défaut, pour lui, dès qu'il ouvre GeoGebra ?
- Les inconvénients suivants ne sont pas propres à GeoGebra, mais inhérents à tout logiciel de géométrie dynamique :
 - D'une part, l'aspect continu des courbes n'est qu'apparent, le monde informatique est par essence *discret* ; étant donné la place toujours accrue qu'il prend dans l'enseignement, il sera de plus en plus difficile de faire admettre l'existence de nombres non-décimaux.
 - D'autre part, il y a identification totale, pour le logiciel, entre chaque objet géométrique et sa représentation algébrique (couple de coordonnées ou équation) : comment faire admettre qu'« on n'additionne pas des points », alors que GeoGebra le fait couramment ? Pourtant mon expérience me dit que l'identification entre le plan et \mathbb{R}^2 , nécessaire dans l'enseignement supérieur, tout comme les abus de notations (AB représentant indifféremment la droite, la longueur, le segment, ...) ne fonctionnent bien que s'ils succèdent à une période de soigneuse classification des objets par espèce.
 - Enfin, l'apparence « parfaite » des figures rend plus difficile encore de convaincre les élèves qu'il est nécessaire de *démontrer* ce que le logiciel leur *montre* comme une évidence.

6. Le logiciel peut et doit changer la pratique enseignante.

En premier lieu, il est temps d'en finir en géométrie avec les questions fermées : « démontrer que... » ; dans l'immense majorité des cas, le logiciel, assorti de quelques indications, permet de constater *de visu* qu'il y a des choses intéressantes dans une configuration, des propriétés qui résistent à la variation des paramètres ; la preuve est alors un second temps de l'activité mathématique. De même *le cours* devrait désormais s'appuyer systématiquement sur une expérimentation préalable, chaque théorème étant d'abord *constaté* avant d'être démontré et institutionnalisé.

L'usage du logiciel devrait également être propice au retour des *problèmes de construction* : outre qu'il remplace les outils matériels par des outils virtuels, plus précis, plus rapides, plus puissants, il peut éviter la difficile *rédaction* (« je trace le cercle de centre A, de rayon BC, ... ») ; en effet, une construction non

(13) Ayant demandé sur le Forum un moyen de créer cet Outil, j'ai eu la réponse en moins d'une heure : créer une Liste de points L1 (un seul point suffit!), une liste de nombres L2 (de même longueur que L1) ; taper dans le champ de saisie $G = \text{Somme}[L1 * L2] / \text{Somme}[L2]$; valider l'outil ayant pour objet final G, objets initiaux L1 et L2 ; il s'appliquera à tout couple L, L', pourvu que L soit une suite de points, L' une suite de nombres de même longueur (quelconque) que L.

mathématiquement valable, même si elle présente l'aspect attendu, ne résistera pas au déplacement des points et des curseurs ; de plus, l'enseignant pourra consulter le *protocole de construction*⁽¹⁴⁾ de l'élève, pour le valider ou non.

GeoGebra élargit donc le champ des problèmes géométriques abordables à un niveau donné ; il favorise une attitude active, exploratoire, de l'élève. Et du fait, noté plus haut, que ses notations sont très proches de celles du cours de mathématiques, son utilisation ne suppose pas l'apprentissage d'une syntaxe absconse ; il ne déplace pas la difficulté des mathématiques vers l'informatique ; au contraire il permet de « faire des maths » sereinement, en fournissant sans grand effort un support visuel à la pensée et au raisonnement.

Annexe : un exemple de réalisation utilisant à la fois Outils, listes et tableur.

Il s'agit de la réalisation d'une image du *Flocon de Von Koch*, objet fractal obtenu à partir d'un triangle équilatéral par l'itération infinie de l'opération : remplacer chaque segment par la ligne brisée suivante (Fig. 5) :

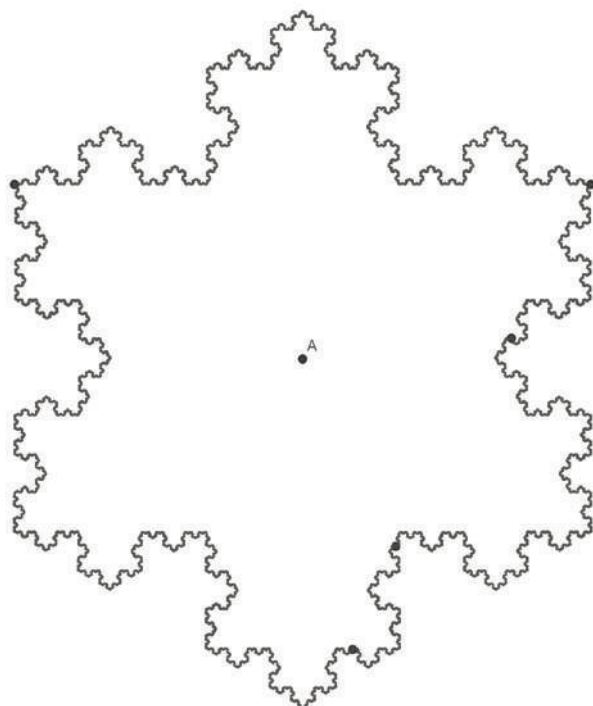


Bien sûr, GeoGebra ne fera pas une infinité d'étapes⁽¹⁵⁾ ; mais cinq ou six suffisent à donner un aperçu intéressant de la chose.

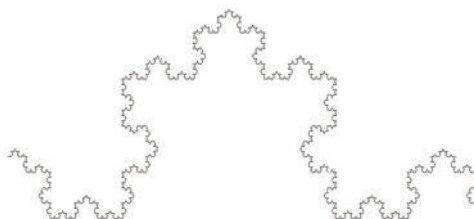
Dans ce but j'ai d'abord créé la liste de quatre points, sommets du triangle de départ, le quatrième élément étant confondu avec le premier. Puis j'ai réalisé un Outil GeoGebra, que j'ai nommé VonKoch, qui, entre deux points d'une liste de points, en intercale trois autres de façon à reproduire la disposition ci-dessus, créant ainsi une nouvelle liste. Dans le tableur, j'ai entré en A1 la liste de quatre points, et en B1 la liste des segments joignant deux à deux les points de A1. En A2 j'ai tapé =VonKoch[A1,i] ; et j'ai « tiré » vers le bas, dans les deux colonnes A et B. Voici ce qu'on obtient (Fig. 6) :

(14) C'est-à-dire la liste des objets créés et leur définition, dans l'ordre de la construction ; il est consultable à partir du menu « Affichage ».

(15) Je suis toujours agacé par les ouvrages et sites de vulgarisation qui donnent des images (souvent très belles) de fractales, sans jamais préciser que *ce n'est pas* une fractale, mais le résultat d'un nombre *fini* d'étapes qui construiraient la fractale si elles étaient répétées *une infinité de fois*.



Et voici un zoom du sommet de la courbe (Fig. 7) :



NB : au prime abord la figure était encombrée d'une multitude de gros points, et de segments indésirables ; pour y remédier j'ai dû : faire un double clic sur l'une des cellules du tableur ; cliquer sur *propriétés* ; dans la partie gauche de la fenêtre qui apparaît, sélectionner toutes les cellules, sauf la dernière de la colonne B, et « dé-cocher » la case « *afficher l'objet* ». Ainsi seuls les segments de la dernière liste sont visibles.

La formule employée pour la conception de l'outil VonKoch est trop compliquée pour être reproduite ici ; elle utilise les complexes (d'où la syntaxe =VonKoch[A1,i]), et trois commandes Si[...] emboîtées, les trois points ajoutés à chaque étape étant définis de façon différente. On pourra la consulter en explorant le fichier GeoGebra « Le flocon de Von Koch » en ligne sur le site de l'APMEP.