

### Exercice 478-1 (Pierre Duchet et Jean Moreau de Saint-Martin – Paris)

Soit  $(\Delta)$  une droite et  $O$  un point extérieur à la droite. On considère un nombre indéterminé de points  $A_i$  de  $(\Delta)$  tels que les cercles inscrits dans les triangles  $OA_iA_{i+1}$  soient tous de même rayon  $r$ . Démontrer que, quel que soit  $k$ , les cercles inscrits dans les triangles  $OA_iA_{i+k}$  sont tous de même rayon  $r_k$ .

**Solution de Raymond Raynaud (Digne)**

1) Soit  $H$  le projeté de  $O$  sur  $\Delta$ . Posons  $OH = h$ .  
Soit  $A$  l'un quelconque des points  $A_i$  et  $A'$  le point  $A_{i+1}$ .  
Soit  $r$  le rayon du cercle inscrit dans le triangle  $OAA'$  et  $s = h - r$ .

Désignons par  $a$  et  $a'$  les angles  $\widehat{HOA}$  et  $\widehat{HOA'}$ . Si  $h$  et  $r$  sont fixés, la donnée de  $a$  entraîne celle de  $a'$ .

Calculons donc  $a'$  en fonction de  $a$ .

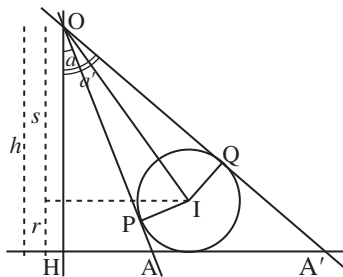
$$OI \cos \frac{a+a'}{2} = s \quad \text{et} \quad OI \sin \frac{a'-a}{2} = r.$$

$$r \cos \frac{a+a'}{2} = s \sin \frac{a'-a}{2},$$

d'où je tire

$$\tan \frac{a'}{2} = \frac{s \tan \frac{a}{2} + r}{r \tan \frac{a}{2} + s}.$$

$\tan \frac{a'}{2}$  est l'image de  $\tan \frac{a}{2}$  par la fonction homographique  $f : t \mapsto t' = \frac{st+r}{rt+s}$  (dont l'hyperbole représentative a son centre sur la deuxième bissectrice).



Appelons **fonctions  $\varphi$**  les fonctions du type  $x \mapsto \frac{px+q}{qx+p}$  où  $p$  et  $q$  sont deux réels strictement positifs.

Il est facile de constater que la composée de deux fonctions  $\varphi$  est une fonction  $\varphi$  :

$$\text{Si } f(x) = \frac{px+q}{qx+p} \text{ et } f'(x) = \frac{p'x+q'}{q'x+p'}, \text{ alors } (f' \circ f)(x) = \frac{(pp'+qq')x + pq' + qp'}{(pq'+qp')x + pp'+qq'}.$$

Donc, si  $f$  est une fonction  $\varphi$ ,  $f^{(k)}$  est aussi une fonction  $\varphi$  pour tout entier  $k$  supérieur à 0.

2) **A étant toujours l'un quelconque des points  $A_i$ , je désigne maintenant par  $A'$  le point  $A_{i+k}$ ,  $k$  étant un entier quelconque supérieur à 0.**

**Comme précédemment,  $a$  et  $a'$  désignent les angles  $\widehat{HOA}$  et  $\widehat{HOA'}$ . Si j'arrive à démontrer que le rayon du cercle inscrit dans le triangle  $AOA'$  est indépendant de  $a$ , le problème sera résolu.**

Mon arme pour réussir est celle-ci :  $a'$  est l'image de  $a$  par une fonction  $\varphi$ . **D'abord,  $h$  étant fixé ainsi que  $a$  et  $a'$ , il faut calculer le rayon  $r$  du cercle inscrit dans le triangle  $AOA'$ .**

En utilisant deux expressions de l'aire du triangle

$$2S = h^2 (\tan a' - \tan a),$$

$$2S = h \left( \tan a' - \tan a + \frac{1}{\cos a} + \frac{1}{\cos a'} \right) r,$$

on obtient

$$r = \left( \frac{pt+q}{qt+p} - t \right) \left( 1 - t \frac{pt+q}{qt+p} \right).$$

Pour démontrer que  $r$  est indépendant de  $a$ , il suffit de démontrer qu'il en est de même

$$\text{de } u = \frac{1}{\frac{\cos a}{\tan a' - \tan a} + \frac{1}{\cos a'}}.$$

Utilisant  $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$  et  $t' = \tan\left(\frac{a'}{2}\right)$ , on obtient  $u = \frac{1-t^2t'^2}{(t'-t)(1+tt')}$ . Comme  $t'$

est l'image de  $t$  par une fonction  $\varphi$ , il existe deux réels  $p$  et  $q$  tels que  $t' = \frac{pt+q}{qt+p}$ .

Dès lors :

$$u = \frac{\left( 1 - t^2 \frac{(pt+q)^2}{(qt+p)^2} \right)}{\left( \frac{pt+q}{qt+p} - t \right) \left( 1 - t \frac{pt+q}{qt+p} \right)} = \frac{(qt+p)^2 - t^2(pt+q)^2}{(pt+q-t(qt+p))(qt+p-t(pt+q))}.$$

$\text{Num}(u) = -p^2t^4 - 2pqt^3 + 2pqt + p^2$  et  $\text{Dén}(u) = -pqt^4 - 2q^2t^3 + 2q^2t + pq$ . Et  $u = \frac{p}{q}$ .

**L'invariance visée est établie. Le rayon du cercle inscrit dans le triangle  $A_iOA_{i+k}$  est indépendant de  $i$ .**

Exemple : intéressons-nous aux triangles  $A_iOA_{i+2}$ .

Si l'on pose  $\widehat{A_1OA_2} = a$  et  $\widehat{A_1OA_3} = a''$ ,

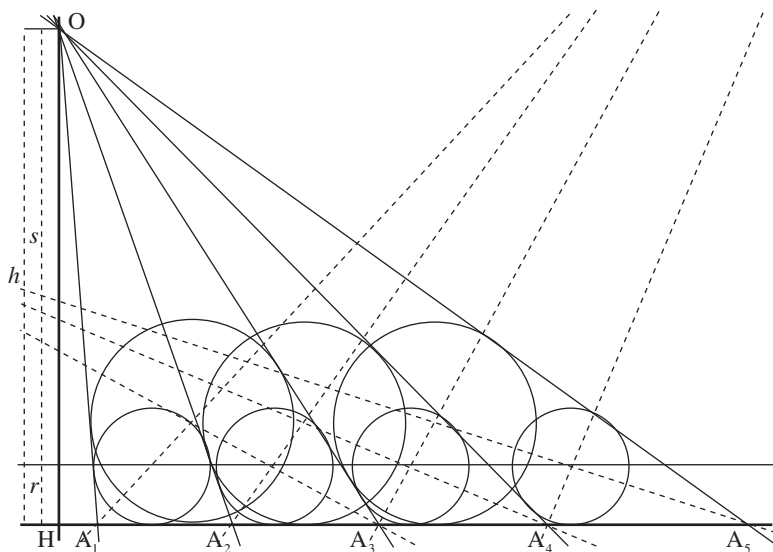
$$\tan \frac{a''}{2} = \frac{(r^2 + s^2) \tan \frac{a}{2} + 2rs}{2rs \tan \frac{a}{2} + r^2 + s^2}.$$

Les coefficients  $p$  et  $q$  de l'étude précédente sont respectivement  $r^2 + s^2$  et  $2rs$ .

Le rayon du cercle inscrit dans le triangle  $A_iOA_{i+2}$  est  $R = \frac{h}{1+u}$  avec  $u = \frac{r^2 + s^2}{2rs}$ .

$$R = \frac{h}{1+u} = \frac{h}{1 + \frac{r^2 + s^2}{2rs}} = \frac{2rsh}{2rs + r^2 + s^2} = \frac{2rs}{h}.$$

Avec, par exemple comme ici,  $h = 10,4$  cm et  $r = 1,2$  cm, on trouve  $R = 2,1$  cm.



**Autres solutions :** Jean-Claude Carréga (Lyon), Marie-Laure Chaillout (Épinay/Orge), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisan), Pierre Renfer (Ostwald).