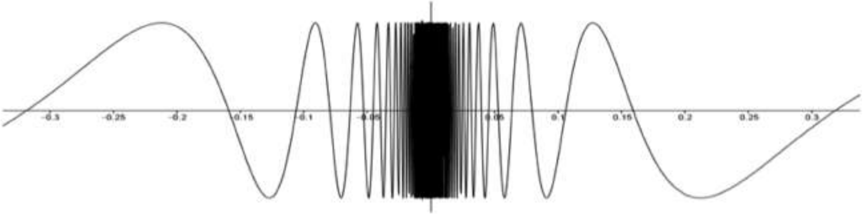
Annexe

1) Fonction discontinue ayant une primitive.

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f\left(x\right)=\sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x\neq 0 \text{ et } f(0)=0.$$



a) f n'est pas continue en 0, puisque $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'existe pas.

b) f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Soit en effet F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{F}(x)=x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)-\int_0^x 2t\cos\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \text{ si } x\neq 0 \text{ et } \mathrm{F}(0)=0.$$

(l'intégrale a un sens car la fonction $t\mapsto 2t\cos\left(\frac{1}{t}\right)$ a pour limite 0 en 0).

Démontrons que $\mathrm{F}'=f$:

• Pour $x\neq 0$,

$$\mathrm{F}'(x)=2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right)-2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=f(x).$$

• Pour $x=0$, cherchons

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{F}(x)}{x}.$$

On part de :

$$\frac{\mathrm{F}(x)}{x}=x\cos\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\int_0^x 2t\cos\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

Or

$$\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}=0$$

car pour tout $x\neq 0$,

$$\left|x\cos\frac{1}{x}\right|\leq|x|\ ;$$

et pour $x>0$,

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x 2t\cos\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t\right|\leq\frac{1}{x}\int_0^x 2t\left|\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right|\mathrm{d}t\leq\frac{1}{x}\int_0^x 2t\,\mathrm{d}t=x,$$

d'où

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\int_0^x 2t\cos\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=0.$$

On en déduit par imparité :

$$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}\int_0^x 2t\cos\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=0,$$

donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{F}(x)}{x}=0,$$

soit

$$\mathrm{F}'0)=0=f(0).$$

Donc $\mathrm{F}'=f$.

2) Fonction de Darboux n'ayant pas de primitive

Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } g(0) = 1.$$

a) g est une fonction de Darboux sur $\mathbb{R}$:

Montrons en effet que l'image de tout intervalle I de $\mathbb{R}$ est un intervalle.
Si I ne contient pas 0, il est inclus soit dans $]0,+\infty[$, soit dans $]-\infty,0[$. Or sur chacun de ces intervalles g est continue, donc l'image de I est un intervalle.
Supposons donc que I contienne 0 :
* Si I = {0}, g(I) = {1} qui est un intervalle.
* Si I = $[0,\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$, alors g(I) = $[-1,1]$:

- l'inclusion $g(\mathrm{I}) \subset [-1,1]$ est claire car $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \in [-1,1]$ pour tout $x \neq 0$, et $g(0) = 1 \in [-1,1]$.
- montrons que $[-1,1] \subset g(\mathrm{I})$: soit y dans $[-1,1]$, cherchons x dans $]0,\varepsilon[$ tel que $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = y$: il suffit pour cela que $\frac{1}{x} = \arcsin(y) + 2k\pi$, avec k entier tel que $\arcsin(y) + 2k\pi > \frac{1}{\varepsilon}$.. Le nombre y a donc une infinité d'antécédents dans $]0,\varepsilon[$.

* Si I = $]-\varepsilon, 0[$ avec $\varepsilon > 0$, un raisonnement analogue montre que g(I) = $[-1,1]$.
* Si I contient 0 sans que 0 soit une borne, alors il contient un intervalle de la forme $[0,\varepsilon[$, donc son image contient $[-1,1]$. D'autre part elle est contenue dans $[-1,1]$, donc elle est égale à $[-1,1]$.

b) g n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$:

En effet si g avait une primitive G, la fonction G − F aurait pour dérivée $g - f$, fonction nulle partout sauf en 0. Or $g - f$ n'est pas une fonction de Darboux, puisqu'un intervalle ouvert contenant 0 a pour image {0,1} qui n'est pas un intervalle. Elle ne peut donc pas être une dérivée.
De façon plus accessible en terminale, on pourrait aussi dire :

G − F serait constante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$. Mais, G − F étant continue sur $\mathbb{R}$ (puisque dérivable), les deux constantes seraient nécessairement égales entre elles, et égales à la valeur de G − F en 0. Donc G − F serait constante sur $\mathbb{R}$, et $g - f$ serait nulle sur $\mathbb{R}$, ce qui n'est pas le cas.