

Leonhard Euler, un mathématicien universel

Mireille Schumacher

aschumac@worldcom.ch

Leonhard Euler (1707 - 1783) illumine le monde scientifique de ses travaux. Il aborde sans relâche toutes les questions savantes de son temps. Aucun domaine des mathématiques - algèbre, géométrie, analyse - ne lui échappe. Il est tout aussi remarquable dans les applications scientifiques comme l'astronomie, la physique ou encore dans l'art de l'ingénieur. L'exposition sur Euler et mon atelier ont pour but de présenter ce génie, les multiples facettes de ses travaux et de mettre en évidence son empreinte scientifique.

I) La vie de Leonhard Euler, né le 15 avril 1707 en Suisse à Bâle.

Au début du 18^{ème} siècle la communauté scientifique vit une évolution extraordinaire. En Europe, les savants débattent des théories révolutionnaires de Newton, des propositions innovantes de Leibniz, étudient les développements du calcul infinitésimal qui vont permettre l'épanouissement de l'analyse.

Jusqu'au milieu du 17^{ème} siècle les travaux scientifiques font l'objet d'échanges épistolaires entre savants éclairés. Dans toute l'Europe s'installe alors l'idée de "pensionner" les chercheurs scientifiques. Ces derniers pourraient ainsi consacrer plus de temps à leurs travaux et en réaliser la publication. Alors le nombre de chaires universitaires augmente. Les cercles de scientifiques, généralement dépendants d'un mécène ou d'une grande personnalité politique, se multiplient. Les académies des sciences s'imposent : elles réunissent d'éminents savants qui ont pour tâche de promouvoir les sciences en publiant régulièrement les comptes-rendus de leurs séances et les résultats de leurs travaux dans des revues spécialisées. Dans cette effervescence les échanges se multiplient, la communication est facilitée, les sciences se partagent. Toute académie contribue au rayonnement des chercheurs et de son mécène.

En 1720, Leonhard Euler a 13 ans et entre à l'université de Bâle pour suivre avec succès une formation en philosophie et en théologie. Parallèlement il s'intéresse aux sciences et devient disciple de Jean Bernouilli, mathématicien très respecté.

Enthousiasmé, il participe aux travaux de la communauté scientifique et très vite son nom est associé à plusieurs recherches. Dans ce contexte Euler va pouvoir faire partager sa passion pour les mathématiques et leurs applications. En 1727, il n'a pas encore 20 ans, que déjà sa renommée est grande et son génie reconnu.

Recommandé par ses amis mathématiciens Nicolas et Daniel Bernouilli, il est invité à participer aux travaux de l'Académie de Russie fondée par Pierre le Grand.

Il restera académicien toute sa vie : de 1727 à 1741 à Saint-Pétersbourg, puis appelé par Frédéric II de 1741 à 1766 à Berlin dans la prestigieuse Académie Royale des Sciences et des Belles Lettres de Prusse, enfin de 1766 à 1783 à Saint-Pétersbourg, rappelé par Catherine II dans l'Académie des Sciences de Russie.

Avec sérénité, intelligence, muni d'une prodigieuse mémoire, Leonhard Euler aborde sans relâche toutes les questions savantes de son temps. Son nom est attaché à plusieurs découvertes, à une multitude de lemmes, de théorèmes, de propriétés remarquables et de formules. Une clarté mathématique dans les commentaires et les démonstrations rend ses écrits accessibles. Les raisonnements soutenus par un mode de réflexion sans faille et l'invention de notations qui facilitent l'entendement

comme par exemple : $f(x)$, sin, cos, tg, le nombre e, font de ses œuvres des monuments mathématiques lus encore de nos jours.

Pour mesurer l'étendue de ses travaux, il suffit de parcourir la table des matières de ses œuvres complètes, bien que tout ne soit pas encore disponible. C'est sans aucun doute le savant le plus prolifique de son temps. Importante aussi est sa correspondance avec les grands scientifiques de son époque. On a peine à concevoir comment un seul homme a pu accomplir un tel ouvrage.

II) L'œuvre complète de Leonhard Euler, en latin Leonhardi Euleri opera omnia, est articulée en trois séries, comptant 72 volumes, qui recensent les 865 écrits du savant, numérotés selon l'Index d'Eneström (lettre E suivie du numéro de l'article) :

PREMIÈRE SÉRIE : MATHÉMATIQUES PURES

29 volumes tous parus

A) Arithmétique et algèbre

Traité d'algèbre – Arithmétique et théorie des nombres – Algèbre supérieure – Récréations mathématiques – Analyse combinatoire – Calcul des probabilités – Assurances sur la vie humaine

B) Analyse mathématique

Traité d'analyse – Séries infinies – Produits infinis. Fractions continues – Calcul intégral – Intégrales elliptiques – Equations différentielles – Calcul des variations

C) Géométrie

Géométrie élémentaire – Trigonométrie – Géométrie analytique – Courbes algébriques – Applications géométriques du calcul différentiel et intégral

DEUXIÈME SÉRIE : MÉCANIQUE ET ASTRONOMIE

31 volumes dont 30 parus et 1 en préparation

A) Mécanique

Traité de mécanique – Mémoires sur les principes de la mécanique – Mécanique du point matériel – Mécanique des corps rigides – Translations – Rotations – Oscillations – Théorie du choc – Mécanique des corps flexibles non élastiques – Mécanique des corps élastiques – Mécanique des liquides et des gaz – Artillerie et balistique – Science de l'ingénieur – Théorie des turbines – Machines diverses – Science navale

B) Astronomie

Traité d'astronomie – Mécanique céleste – Le problème des trois corps – Détermination des orbites planétaires – Précession et nutation – Astronomie sphérique – Parallaxe – Figure des corps célestes – Géodésie – Théorie des marées – Astrophysique

TROISIÈME SÉRIE : PHYSIQUE, DIVERS

12 volumes dont 11 parus et 1 en préparation

A) Physique

Physique générale – Chaleur – Acoustique – Musique – Electricité – Magnétisme – Optique théorique – Traité de dioptrique – Instruments optiques

B) Divers : Lettres à une princesse d'Allemagne

Une **QUATRIÈME SÉRIE** recense la correspondance et les manuscrits.

A) CORRESPONDANCE D'EULER AVEC SES CONTEMPORAINS

10 volumes dont 4 parus et 6 en préparation

Correspondance de Leonhard Euler avec Jean Bernoulli et Nicolas Bernoulli -

Correspondance de Leonhard Euler avec A.C. Clairaut, J. d'Alembert et J.L.

Lagrange – Correspondance de Leonhard Euler avec P.-L. M. de Maupertuis et Frédéric II

Le prochain volume de la correspondance d'Euler paraîtra en 2011. Il s'agit en partie de lettres échangées avec des savants romands : Gabriel Cramer, Charles Bonnet, Georges-Louis Lesage et l'éditeur Bousquet. Ces lettres fournissent quelques éclairage sur l'histoire culturelle vers 1800 en Suisse Romande.

B) MANUSCRITS : Parution planifiée

Les opera omnia sont édités par la commission Euler à Bâle (www.euler-2007.ch), en collaboration avec de nombreux spécialistes, sous les auspices de l'Académie suisse des sciences naturelles (www.scnat.ch) aux Editions Birkhäuser (www.birkhauser.ch) à Bâle.

III) Fermat – Euler – RSA un système de cryptographie

En théorie des nombres, Fermat n'a pas énoncé que le « grand » théorème dont la démonstration a été achevée en 1995. Dans une lettre du 18 octobre 1640 il écrit :

« Tout nombre premier mesure (divise) infailliblement une des puissances -1 de quelque progression que ce soit, et l'exposant de la dite puissance est sous-multiple du nombre premier - 1 ; et après qu'on a trouvé la première puissance qui satisfait à la question, toutes celles dont les exposants sont multiples de l'exposant de la première satisfont de même à la question »

Exemple : 13 divise $3^3 - 1 = 27 - 1 = 26$

$$13 \text{ divise } 3^{12} - 1 = 531441 - 1 = 531440 = 40880 \cdot 13$$

« Et cette proposition est généralement vraie en toutes progressions et en tous nombres premiers ; de quoi je vous enverrais la démonstration, si je n'appréhendois d'être trop long (sic !) ». En notation moderne :

« petit » théorème de Fermat 1640

Pour tout nombre a et tout nombre premier p ne divisant pas a , il existe un plus petit exposant d tel que $a^d - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ avec d divisant $p-1$ et donc $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$

Leonhard Euler démontre ce théorème en 1736 et le généralise en 1758 aux modules non premiers.

Théorème d'Euler : $a^{\varphi(m)} - 1 \equiv 0 \pmod{m}$ où $\varphi(m)$ représente le nombre d'entiers inférieurs à m et premiers avec m .

Exemple : si $m = 20$, alors 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19 sont premiers avec 20 et $\varphi(20) = 8$. On a donc pour $a = 3$: $3^8 - 1 = 6561 - 1 = 6560 = 328 \cdot 20$

Si p est premier, alors $\varphi(p) = p - 1$ car tous les entiers inférieurs à p sont premiers avec p puisque p est premier. Le théorème de Fermat est donc un cas particulier du théorème d'Euler.

Ronald Rivest, Adi Shamir et Leonard Adleman créent en 1977 le système RSA de cryptographie à clé publique basé sur l'exponentiation modulaire qui apparaît dans le théorème d'Euler-Fermat et sur la difficulté à décomposer un très grand

nombre entier en facteurs premiers, ce qui permettrait de trouver la clé privée à partir de la clé publique.

C'est aujourd'hui une des composantes du protocole SSL (*Secure Socket Layer*) qui sécurise la plupart des transactions sur Internet.

IV) La théorie de la construction et de la manœuvre des vaisseaux

Leonhard Euler fut sans doute l'un des fondateurs de l'architecture navale moderne. Si les scientifiques Huygens et Pascal ont ouvert la voie dans la redécouverte de l'ancien savoir-faire d'Archimède avec des méthodes nouvelles, c'est pourtant à Euler que revient l'essentiel des fondements de l'hydrostatique et de l'hydrodynamique.

De nos jours, il est possible de calculer exactement comment un bateau doit être conçu pour tenir la mer. Au 17^e siècle, les architectes utilisaient des tables contenant les mesures qui avaient bien fonctionné dans le passé. On n'effectuait que peu de calculs, et les navires n'étaient pratiquement pas construits sur la base de plans. Seuls la longueur, la largeur, ainsi que d'éventuels chargements, étaient pris en compte dans le cadre des contrats entre le client et le constructeur. On réalisait des modèles réduits dont on conservait les proportions. Ces méthodes de travail traditionnelles, ainsi que les constructions navales toujours hasardeuses, furent à l'origine de nombreuses catastrophes.

L'un des naufrages les plus spectaculaires de cette époque fut celui du navire de guerre suédois, le *Vasa*, construit par le roi Gustave II Adolphe de Suède, de la dynastie des *Vasa*, entre 1626 et 1628. Le *Vasa* était un trois-mâts de 62 mètres de long, 52 mètres de haut et 11,7 mètres de large. Il pesait 1200 tonnes et embarquait 64 canons. Le 10 août 1628, lorsque le navire quitta le port pour la première fois, il chavira brusquement, se renversant sur le côté, et coula en l'espace de quelques minutes. Ce naufrage donna lieu à un procès pour en éclaircir les causes. En réalité, c'est une combinaison de différentes circonstances qui avait conduit au naufrage. Le roi avait d'une part constamment modifié la taille du bateau durant sa construction, si bien que les proportions étaient faussées. D'autre part, des canons supplémentaires avaient été montés, de sorte que le centre de gravité du navire se déplaça beaucoup plus haut que prévu. Si les théories d'Euler avaient pu être appliquées à cette époque, cette catastrophe aurait pu être évitée.

Le renflouement du *Vasa* eut lieu en 1961, après 333 ans passés dans les eaux glaciales de la Baltique. Il se trouve aujourd'hui dans le très beau Musée *Vasa* à Stockholm.

C'est à Archimède (287-212 av. J.-C.) que l'on doit les fondements de l'hydrostatique. Il est aussi à l'origine d'un critère de stabilité pour des formes très simples. Mais ce savoir fut perdu au Moyen Age pour plusieurs centaines d'années. Euler fut l'un des premiers à utiliser les progrès récents des sciences physiques et mathématiques pour étudier en détail l'ingénierie navale. Euler attachait toujours beaucoup d'importance à développer des solutions aussi concrètes que possible aux problèmes de la construction des bateaux. Mais il renonça à les accompagner d'exemples d'utilisation, si bien que ses théories et ses méthodes ne furent pratiquement pas appliquées de son temps. Deux raisons ultérieures peuvent être invoquées pour expliquer leur manque de diffusion aux 18^e et 19^e siècles : en

premier lieu, la plupart des publications étaient rédigées en latin ; par ailleurs, jusqu'au développement de l'informatique, il n'était guère envisageable de réaliser des calculs si astreignants.

La biographie d'Euler à la lumière de la construction navale

C'est à l'époque de ses études à l'Université de Bâle, à l'âge de 15 ans, qu'Euler entra en contact avec celui qui deviendra son maître. Jean Bernoulli, à la pointe de la recherche dans le domaine de la construction navale, reconnut le talent d'Euler et le soutint beaucoup. Il l'invita à des réunions privées le samedi, où l'on discutait de littérature et de physique. C'est là qu'il fit la connaissance de son fils Daniel Bernoulli, avec lequel il entretint une longue amitié.

Jean Bernoulli s'était déjà occupé auparavant de questions d'hydrodynamique, et il avait fait de grands progrès dans le domaine. Mais les résultats s'accordaient mal avec la réalité, car certaines bases, largement reconnues, étaient trop imprécises. Euler se fixa pour but d'éliminer ces imprécisions. Ce fut là à la fois son premier grand travail et son entrée dans le champ de l'hydrodynamique.

Sur le conseil de Bernoulli, Euler participa au concours de l'Académie des Sciences de Paris. On ne sait pas exactement pour quelle raison Bernoulli n'y prit pas part lui-même, mais on suppose qu'il ne voulait pas prendre le risque d'un blâme dans ce domaine nouveau. Le premier prix fut remporté par le français Pierre Bouguer. Euler gagna le deuxième prix, ce qui lui conféra une reconnaissance officielle.

La même année, Euler fut invité à occuper un poste d'enseignement à l'Académie des Sciences russe. Il passa à Saint-Pétersbourg 14 années fécondes qui conduisirent au concept remarquable du «moment de force» dans la stabilité du vaisseau.

Pour des raisons politiques, Euler quitta Saint-Pétersbourg pour Berlin, où il définit les bases de la mécanique des fluides, qui conservent leur validité aujourd'hui. Il développa aussi des lois régissant la propulsion des navires et le calcul de leurs mouvements.

On évoquera ci-dessous l'influence d'Euler dans le domaine de la stabilité et de la résistance des navires.

Hydrostatique et stabilité

L'hydrostatique étudie le navire immobile : flottabilité et stabilité

L'une des acquisitions les plus remarquables que l'on doit à Euler dans ce domaine, fut le recours au calcul intégral, encore récent, pour résoudre des problèmes jusqu'alors sans réponse. Avant Euler, il n'était pas possible de déterminer la stabilité de vaisseaux avant la mise à l'eau du bâtiment.

Dans des recherches élaborées en parallèle avec Pierre Bouguer, Euler développa le concept de la *hauteur métacentrique*. Le *métacentre* est un point géométrique déterminé uniquement par la géométrie de la coque du bateau. Des prévisions très précises quant à la stabilité du navire peuvent être faites à l'aide de ce point et du centre de gravité du navire. Les principes de base posés par Euler permettent de réaliser des courbes dites « de stabilité ».

Hydrodynamique et résistance du vaisseau

L'hydrodynamique considère le navire en mouvement : propulsion, manœuvrabilité

Euler s'intéressa très tôt au calcul de la résistance des vaisseaux. L'importance de ces calculs réside en ce qu'ils permettent de déterminer la vitesse du navire avant la

construction, de connaître avec précision la surface des voiles nécessaires ou la puissance adéquate pour les propulsions mécaniques (rames, machine à vapeur). Si Euler ne réussit pas à proposer une solution aux problèmes pratiques dans ce domaine, il a le mérite d'avoir réfuté les théories, alors admises de Newton, et d'avoir proposé de nouvelles approches. Dans sa « Théorie des champs fluides » Euler relia les principes de la dynamique mécanique à ses propres observations et à de nouveaux outils mathématiques.

Les conquêtes de l'industrie informatique ont été indispensables à la réalisation des calculs qu'Euler avait exposés

Ces dernières décennies, l'avènement de l'ordinateur a radicalement changé la pratique de l'architecture et de la construction navale à tous les niveaux. Le concept CFD (Computational Fluid Dynamics) est le principe de la construction moderne des bateaux et des yachts. Le CFD permet de simuler le champ du relief des vagues autour de n'importe quel bateau et de faire des pronostics rigoureux sur la hauteur des vagues autour de celui-ci. De la même manière, on peut déterminer l'énergie nécessaire à la marche du bateau dans l'eau à une vitesse donnée. Pour atteindre une précision élevée, des ordinateurs puissants doivent calculer pendant plusieurs jours. Seules les ressources d'ordinateurs ultra performants du 21^e siècle permettent aux constructeurs navals de réaliser les calculs qu'Euler avait proposés.

V) Euler un regard vers le futur

La formule $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ que démontra Euler établit le rôle central de l'exponentielle de base « e ». Cette formule sert par exemple à décrire les vibrations que subit une corde de musique. Les calculs concernant les vibrations, la stabilité et les sollicitations d'un pont induites par les vents, tel le viaduc de Millau, près de Clermont-Ferrand, plus haut pont autoroutier d'Europe, reposent sur les formules d'Euler.

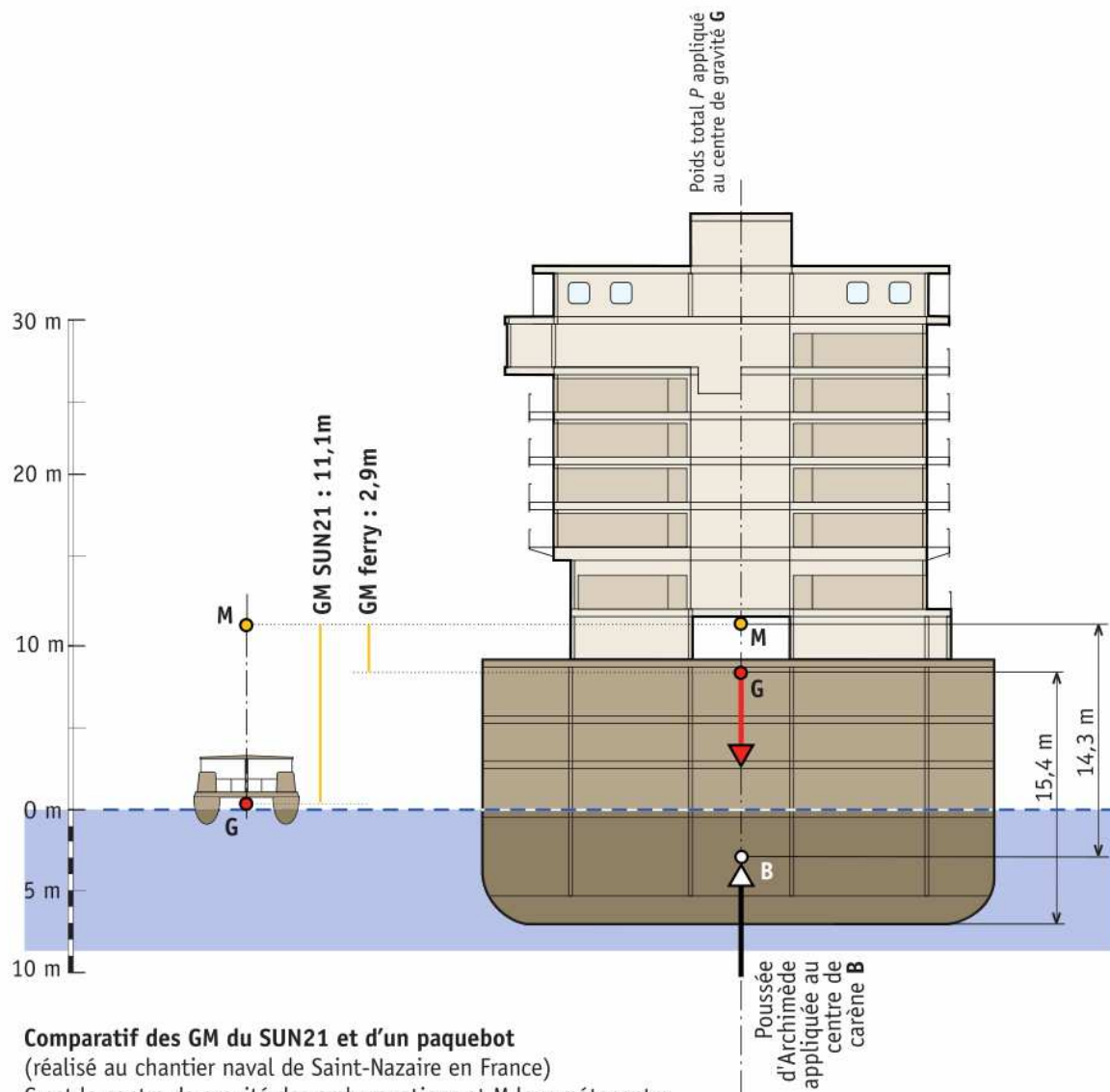
Euler a été le premier à utiliser le calcul infinitésimal pour décrire le mouvement d'un fluide s'écoulant autour d'une forme. Sa méthode est encore utilisée aujourd'hui avant de construire les avions et les bateaux. Ainsi, le design de l'Airbus A380, celui de la coque d'Alinghi ou l'établissement des prévisions météo recourent aux équations différentielles de la dynamique des fluides qu'il a développées.

Références

eu(er)ⁿ publication du Gymnase d'Yverdon (CH) ISBN 978-2-8399-0330-1, 2007
<http://www.euler-ch.org/>

L'idée, le concept et la réalisation de la publication et de l'exposition Euler sont dus à René Galland, Paul Gannagé, Mireille Schumacher et Francis Volken (design graphique), enseignants au Gymnase d'Yverdon. Ont participé à la rédaction des articles ci-dessus : François Bruand, Andreas Kindlimann (architecte naval), Anne-Marie Naudy et Mireille Schumacher

mireille.schumacher@vd.educanet2.ch achat publication et coordination de l'emprunt de l'exposition Euler



Comparatif des GM du SUN21 et d'un paquebot

(réalisé au chantier naval de Saint-Nazaire en France)

G est le centre de gravité des embarquations et M leur métacentre.

La valeur GM de 2.9 mètres est classique pour un paquebot.

Le SUN21 est un catamaran (bateau à deux coques), le premier bateau solaire à avoir effectué la traversée de l'Atlantique (mai 2007). Grâce à ses deux coques, il a un métacentre élevé, ce qui lui confère une grande stabilité.