Martine Bühler

Introduction

Dans le présent texte, le lecteur trouvera un extrait des *Métriques* de Héron d'Alexandrie (Traduction du grec par Jacqueline Guichard - IREM de Poitiers) que l'auteure a exploité dans sa classe de Première S en 2011-2012 au troisième trimestre. Dans la première partie, nous donnons le texte tel qu'il a été distribué en classe ; dans la seconde, nous commentons la séance d'enseignement.

A. Document de travail

I. Explorations numériques
Lecture du texte

Texte	Questions
Puisque donc, 720 n'a pas de racine rationnelle, nous extrairons, avec la plus petite différence possible, la racine de la façon suivante : puisque le carré qui s'approche le plus de 720 est 729 et a pour racine 27, divise 720 par 27 ; cela fait 26 et $\frac{2}{3}$; ajoute 27 cela fait $53\frac{2}{3}$; prends-en la moitié ; cela fait $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. Ainsi donc, la racine la plus proche de 720 sera $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$.	1. Que signifie : « 720 n'a pas de racine rationnelle » ? 2. Vérifier, par un calcul de fractions fait sur la copie, que $\frac{720}{27}=26+\frac{2}{3}$. 3. Vérifier de même que : $\frac{1}{2}\times\left(53+\frac{2}{3}\right)=26+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.
En effet, $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ multiplié par lui-même fait $720\frac{1}{36}$; de sorte que la différence est de $\frac{1}{36}$. Si nous voulons que la différence devienne inférieure à $\frac{1}{36}$, nous mettrons les $720\frac{1}{36}$ trouvés tout à l'heure à la place de 729 et, après avoir fait les mêmes opérations, nous trouverons que le différence suivante devient inférieure de beaucoup à $\frac{1}{36}$.	4. Calculer $\left(26+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^2=\left(26+\frac{5}{6}\right)^2$ et vérifier le calcul de Héron.

II. Application de la procédure de Héron pour le calcul d'une approximation rationnelle de $\sqrt{17}$

1. a. Quel est le carré d'entier le plus proche de 17 ? Quel est son côté a ?
b. Appliquer pas à pas la procédure de Héron à ce nombre a, en travaillant avec des fractions (irréductibles) et en écrivant les calculs sur la copie. La procédure commence donc par :
« Divisons 17 par … ».
c. Vous avez dû aboutir à $\frac{33}{8}$. A l'aide de la calculatrice, donner une approximation décimale de $\left(\frac{33}{8}\right)^2$ à 10^{-3} près.

2. a. Appliquer la procédure de Héron à $\frac{33}{8}$. Quel nombre rationnel obtient-on ?
b. A l'aide de la calculatrice, donner une approximation décimale du carré de ce nombre à 10^{-6} près. Que pensez-vous du procédé de Héron ?
3. On obtient ainsi une suite de nombres rationnels qui semblent « se rapprocher » très vite de $\sqrt{17}$. On appelle u_0 le nombre a dont on est parti, donc, ici, $u_0 = 4$.
a. On appelle :

u_1 le nombre obtenu à la première étape ;
u_2 le nombre obtenu à la deuxième étape ;
…
u_n le nombre obtenu à la n^{e} étape.

Donner u_1 et u_2 sous forme fractionnaire.
b. Donner, sans calculer ce nombre, l'expression de u_3 en fonction de u_2, puis de u_4 en fonction de u_3,
c. Comment pourriez-vous définir complètement cette suite (infinie) de nombres (sans écrire une infinité de relations !)?

III. Algorithmique
1. On cherche à obtenir des approximations de $\sqrt{N}$, N étant un nombre entier non nul donné. On suppose connu le nombre entier a dont le carré est le plus proche de N.
Ecrire un algorithme répétant n fois la procédure de Héron, en partant de a, le nombre n étant un entier saisi par l'utilisateur.

2. Ecrire un algorithme donnant la valeur A de la partie entière de $\sqrt{N}$, sans utiliser la fonction « racine carrée », le nombre N étant un entier saisi par l'utilisateur.
Remarque : la procédure de Héron fonctionne aussi bien en partant de ce nombre A.

3. Ecrire un algorithme donnant, à l'aide du procédé de Héron, une valeur approchée U de $\sqrt{N}$, telle que $\left|U^2 - N\right| < 10^{-10}$, sans utiliser la fonction « racine carrée ».

Pour aller plus loin

On utilise la procédure de Héron pour obtenir une approximation de $\sqrt{N}$, N étant un nombre entier non nul donné. On part de la partie entière A de $\sqrt{N}$.

a. Justifier que, à chaque étape, l'approximation obtenue est supérieure ou égale à la partie entière A de $\sqrt{N}$.

(Indication : à partir de l'étape 1, on pourra calculer, pour tout nombre réel positif, la différence $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{N}{x}+x\right)\right]^2 - N$ *et examiner son signe).*

b. En déduire qu'à chaque étape, si U est l'approximation obtenue, alors : $\left|U - \sqrt{N}\right| \leq \frac{1}{2A}\left|U^2 - N\right|$.

c. Ecrire alors un algorithme pour lequel le test d'arrêt est : $\left|U - \sqrt{N}\right| < 10^{-10}$.

B. Analyse du travail en classe sur le texte de Héron en 1S

Le but de la séance est d'introduire le cours sur les suites, avec une échappée du côté de l'algorithmique. Il s'agit d'une bonne classe, certes hétérogène, certains élèves ayant beaucoup de difficultés, mais avec aussi d'excellents élèves, et, surtout, une très bonne ambiance de travail.

Les élèves sont par groupes de trois ou quatre ; les neuf groupes ont travaillé 1h20 environ, puis il y a eu une synthèse commune d'un quart d'heure. Ce travail a eu lieu lors d'une plage horaire habituelle de 2 heures. Les élèves avaient déjà effectué du travail en groupes, en particulier lors de la recherche d'un problème ouvert permettant d'introduire les probabilités.

Le démarrage est difficile car un certain nombre d'élèves ont beaucoup de mal avec les calculs de fractions (les problèmes de calcul sont de plus en plus fréquents au lycée). Après 20 minutes de travail individuel (et silencieux) sur le texte, mise en commun à l'intérieur des groupes. Chaque groupe doit rédiger collectivement sur feuille les réponses au II et au III.

Un groupe a tellement de difficultés avec les calculs de fractions que personne dans le groupe ne comprend le sens du texte. Après explications de l'enseignante, tout le monde semble comprendre ce que fait Héron et pourquoi.

Le II commence bien et tous les groupes aboutissent à $\frac{33}{8}$ et voient que $\left(\frac{33}{8}\right)^2$ est plus proche de 17 que 4^2. Les choses se gâtent lorsqu'il faut appliquer la procédure à $\frac{33}{8}$, car les élèves comprennent mal la question (qu'il faut donc rédiger plus clairement). Certains groupes cherchent en fait à approcher la racine carrée de $\frac{33}{8}$ (ce qui prouve qu'ils n'ont pas lu l'intitulé du II). Mon intervention est nécessaire auprès de la majorité des groupes pour la compréhension de ce qui est demandé et, pour deux groupes, pour faire écrire effectivement la procédure partant de 4, car ces deux groupes s'étaient contentés d'écrire les calculs sans décrire la procédure, ce qui les bloquait pour l'application à $\frac{33}{8}$.

Finalement, tous les groupes arrivent à l'approximation $\frac{2177}{528}$ et constatent l'efficacité du procédé.
7 groupes expriment correctement u_4 en fonction de u_3.
5 groupes expriment correctement u_{n+1} en fonction de u_n.
2 groupes écrivent correctement l'algorithme du III.1°), un groupe en commençant l'écriture sans avoir le temps de terminer.
Les 6 autres groupes ne sont pas arrivés jusque-là.

Après avoir ramassé les feuilles, j'ai fait une synthèse rapide pour arriver à la notion de suite, que j'ai définie (dans le cahier d'exercices). Nous avions déjà rencontré notation et notion dans un exercice sur la dichotomie.
La séance suivante a commencé par quelques mots situant Héron et *Les métriques*, et donnant le problème pour lequel il a besoin de la racine de 720. J'ai demandé à toute la classe d'écrire les algorithmes demandés au III 1°) et 2°) pour la séance suivante. Puis j'ai commencé le cours sur les suites.
A la séance suivante, nous avons corrigé l'algorithme du III 1°) qu'un nombre non négligeable d'élèves avaient écrit, mais personne n'avait d'idée pour un algorithme donnant la valeur de la partie entière de la racine carrée d'un nombre N. J'ai demandé aux élèves de se débrouiller sans calculatrice pour trouver la partie entière de la racine carrée de 215. Grand désarroi chez certains, mais d'autres commencent à essayer des nombres (11, 12,…). L'idée circule et nous en venons à l'idée qu'on démarre d'un nombre comme 10, car il nous paraît évident que $10^2 < 215$ et que nous essayons les entiers successifs ; nous nous arrêterons dès que le carré de l'entier essayé dépasse 215. D'où l'idée d'une boucle Tantque (démarrage à 1), à écrire pour la séance suivante, ainsi que le dernier algorithme.
La partie « Pour aller plus loin » est laissée en exercice facultatif à rendre pour les élèves intéressés.