Piste d'utilisation en classe : modélisation de l'équation de transport

• Description

« Une information notée $u(x,t)$ se déplace à vitesse constante $c > 0$, où x et t représentent les variables d'espace et de temps. »

• L'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+c\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=0. \tag{1}$$

• En classe (nécessite la connaissance de la méthode d'Euler)

– **Modélisation**

Traduisons en termes mathématiques la description ci-dessus : pour toute position x et tout instant t, considérons un laps de temps Δt durant lequel l'information se déplace. Puisque l'information se déplace à vitesse constante c, alors à l'instant $t + \Delta t$ et au point x, l'information est la même qu'à l'instant t et à la position $x - c\Delta t$, d'où :

$$u(x,t+\Delta t)=u(x-c\Delta t,t).$$

Retranchons maintenant $u(x,t)$ de part et d'autre de l'égalité ci-dessus, et divisons par Δt. On obtient après calcul :

$$\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t)}{\Delta t}+c\frac{u(x,t)-u(x-c\Delta t,t)}{c\Delta t}=0.$$

Considérons la première de ces deux fractions. Pour tout x fixé (quitte à considérer la fonction d'une seule variable $f_x(t) = u(x,t)$, faisons tendre Δt vers 0. Par définition de la dérivée (ici par rapport au temps), le taux d'accroissement $\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t)}{\Delta t}$ tend effectivement vers $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ On obtient finalement l'équation (1) en agissant de même sur la seconde fraction, dans laquelle cette fois-ci t est fixé et où l'on peut définir $\Delta x = c\Delta t$.

– **Méthode d'Euler**

Afin de résoudre numériquement l'équation (1), on se donne un pas de temps Δt et un pas d'espace Δx, et l'on définit pour tout $0 \leq n \leq \mathrm{N}$ et tout $0 \leq j \leq \mathrm{J}$ le réel u_j^n par l'approximation de la fonction $u(x,t)$ au temps $t = n\Delta t$ et au point $x = j\Delta x$ (voir [1] et [2] pour les détails de ces définitions).

Si l'on se dote d'une donnée initiale $\left(u_j^0\right)_{0\leq j\leq \mathrm{J}}$ ainsi que d'une condition aux limites périodique $u_0^n = u_\mathrm{J}^n$ (comme pour simuler une hola dans un stade par exemple), il est facile de calculer les itérées successives u_j^n grâce à la formule suivante (qui repose sur la méthode d'Euler explicite appliquée à la fois en espace et en temps) :

$$\frac{u_j^{n+11} - u_j^n}{\Delta t} + c\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0, \quad \forall 0 \leq n \leq \mathrm{N}-1, \forall 1 \leq j \leq \mathrm{J}. \tag{2}$$

– **Algorithme** (calcul des u_j^n par récurrence)

La donnée initiale $\left(u_j^0\right)_{0 \leq j \leq \mathrm{J}}$ étant connue, on calcule les u_j^1 pour j ≥ 1 grâce à la formule (2), et l'on n'oublie pas la condition aux limites qui nous donne $u_0^n = u_\mathrm{J}^n$

Ainsi, tous les $\left(u_j^1\right)_{0 \leq j \leq \mathrm{J}}$ sont connus et l'on peut procéder au calcul des $\left(u_j^2\right)_{0 \leq j \leq \mathrm{J}}$ et ainsi de suite jusqu'à $n = \mathrm{N}$.