

## Le mot et la chose : l'existence des ensembles

Philippe BOULANGER  
philippeboulanger2001@yahoo.fr

Écrivez vous : « *L'ensemble des enfants s'écria bruyamment...* » ou « *L'ensemble des enfants s'écrièrent bruyamment....* »;

Écrivez-vous : « *Le chœur des enfants enchaîna le refrain.* » ou « *Le chœur des enfants enchaînèrent le refrain.* ».

Dans Racine l'accord se fait sur la pluralité des éléments de l'ensemble des pauvres.

« *Entre le pauvre et vous, vous prendrez Dieu pour juge,  
Vous souvenant, mon fils, que, caché sous ce lin,  
Comme eux vous fûtes pauvre, et comme eux orphelin.* »

[\*Racine, Athalie, IV,3\*](#)

La figure d'accord est une *syllepse* : l'accord dépend de la réalité que vous accordez à un ensemble, ici l'ensemble des enfants ou le chœur des enfants. Nous verrons que de telles règles ont de l'importance : la logique, c'est d'abord la grammaire a expliqué Abélard (1079-1142). Pour Abélard, la grammaire est un code, presque un système d'axiomes, qui nous permet (ou permettent) de raisonner

Examinons un cas lié.

Quel yaourt veux-tu, demande-t-on à Bastien qui a 4 ans ? Un yaourt à la cerise, répond-il, péremptoire. Paroles qu'il faut déchiffrer, car le son émis est presque incompréhensible : le mot yaourt est un gargouillis qui semble faire entendre qu'il l'a déjà dans la bouche.

Se rend-on bien compte combien cette réponse implique d'abstraction chez un enfant? Bastien a le sentiment qu'il existe une entité englobant tous les yaourts au parfum de cerise, « le » yaourt à la cerise. Bastien est réaliste. Il sait que le yaourt à la cerise existe indépendamment de l'esprit humain et des objets particuliers. Bastien est passé de la généralité à l'abstraction.

Et Chirac, quand il disait « J'aime les pommes en général » était réaliste.

*La réalité des universaux, une querelle universelle*

Les théologiens du Moyen Âge, notamment Abélard (un hyper nominaliste pour qui les idées générales n'ont aucun sens) s'intéressaient à des questions pertinentes de ce type. Exprimées en termes modernes : l'ensemble des choses défini par une caractéristique commune de ces choses, est-elle une chose ? Et la querelle allait bon train entre nominalistes et réalistes. Les nominalistes pensaient que les choses universelles, les

« universaux » étaient des concepts mentaux essentiellement définies par leur nom et ne leur accordaient aucune réalité (en dehors du cerveau de celui qui les conçoit). Le nominaliste s'oppose à l'idée qu'il existe quelque chose de général en dehors du particulier dans lequel il serait instancié (par exemple qu'il y ait du Beau en général, en dehors de cet objet beau dans lequel il apparaît).

Les réalistes affirmaient au contraire la tangibilité des vues de l'esprit. Abélard a suivi l'enseignement de Guillaume de Champeaux, archidiacre de Notre-Dame, mais il s'oppose à celui-ci dans la querelle des universaux en prenant parti contre le réalisme, ce qui fera des deux hommes des rivaux jusqu'à leur mort. Abélard avait une grande facilité pour se faire des ennemis. Au Moyen Âge les gens mouraient pour leurs idées : ils estimaient que la vie terrestre n'avait pas beaucoup d'importance car la vie éternelle était en jeu et il pratiquait tous le pari de Pascal.

### *Du tas au Vleu*

Évidemment les Grecs avaient beaucoup réfléchi à la question et le passage de grains de sable épars au statut de « tas » est le passage du nominaliste au réalisme.

En sciences de la nature, le problème est d'importance : si j'ai bien compris, Linné, il y a trois cent ans était réaliste car les espèces étaient immuablement conçues par Dieu et pouvaient donc être distinguées (au contraire, les monstres fabuleux de l'antiquité n'étaient que des productions de l'esprit humain, des noms sans réalité). C'est avec Linné, que l'on se rend compte que classer (opération plus ou moins réaliste selon l'importance qu'on lui attache) n'est pas nommer (nominalisme). En revanche Buffon n'aime pas l'espèce, pour lui seul existe l'individu, l'« accident », que ses adversaires regroupent de façon artificielle à des fins de classement. Buffon est nominaliste.

Condillac (1715-1780), un des opposants à Linné était aussi nominaliste : pour lui on pouvait créer des hiérarchies complexes comme celle des anges et des démons qui ne sont que des rêveries. Évidemment Darwin (1809-1882) était réaliste sur la question de l'espèce : son œuvre majeure n'est-elle pas « L'évolution des espèces » et non l'évolution de l'individu. Selon Darwin, l'espèce a une réalité, définie par ses caractéristiques. La survie du plus fort des individus, certes, mais pour le plus grand bien d'une entité réelle, l'espèce.

À stade, nous penchons pour le réalisme, mais un exemple va nous troubler. Nelson Goodman a montré que nous devrions être nominalistes à travers l'exemple des émeraudes Vleu. Goodman inventa l'adjectif « vleu » signifiant « vert jusqu'à une certaine date  $t$  et bleu ensuite ». Goodman avance que si l'observation d'une émeraude verte étaye l'induction logique « Toutes les émeraudes sont vertes », elle étaye de la même manière

l'affirmation que « Toutes les émeraudes sont vleues ». Il est donc paradoxal que nous soyons prompts à accepter la première affirmation, et non la seconde. Pourquoi n'induisons-nous pas que « toutes les émeraudes sont vleues » ? Parce que le changement de couleur d'une émeraude nécessite un agent du changement, et qu'on n'en voit guère qui serait coordonné au calendrier.

Guillaume d'Ockham (1285-1347), nominaliste, s'était, semble-t-il, posé la question et l'avait tranché.

Restons au Moyen Âge : pour approfondir le sujet les Abélard, les Siger de Brabant (1240 – 1284) et les Guillaume d'Occam ((v.1285 - 1349) affrontaient les Guillaume de Champeaux (1070 - 1122) et les Thomas d'Aquin (1225-1274), debout sur le parvis des cathédrales, avec en arrière-fond des schismes possibles, des excommunications redoutables et des bûchers expiatoires définitifs. On considère Guillaume de Champeaux comme le fondateur du réalisme radical, philosophie selon laquelle les Universaux existent indépendamment aussi bien de l'esprit humain que des objets particuliers (une philosophie qui découlait du réalisme platonicien). Contre Abélard, son ancien élève, il concluait que les hommes ont tous la même essence, mais elle subit des modifications accidentelles. Ainsi Saint Bernard était réaliste car la question de la réalité de la Sainte Trinité interdisait le nominalisme. Et comme il y avait du pouvoir et de l'argent derrière tout cela, les nominalistes et les réalistes se battaient dans les rues du Quartier latin : il y eut des morts sous Charles VII (1403-1461).

Sous-jacent est le problème de la connaissance. Si l'on pense que toute connaissance est cérébrale et relève d'une expérience quasi mystique personnelle, le corollaire de cette croyance est l'irrationnel des sectes religieuses. Et les théologiens se posaient la question : comment un Dieu isolé dans sa transcendance pourrait-il avoir créé le monde concret ?

#### *Anselme et l'existence de la structure divine*

Anselme de Cantorbéry (1034-1109) prétendait dissenter des qualités des choses divines pour prouver leur existence et sa preuve ontologique de l'existence de Dieu est le chef d'œuvre du sophisme. Examinons sa démonstration de la plénitude :

*Dieu s'il existe est parfait. Mais la perfection implique l'existence car l'existence est une qualité supérieure à l'inexistence, donc fait partie de la perfection. Comme Dieu a toutes les qualités, il doit exister, il existe donc... Et hop là.*

Voilà qui est néanmoins admirable et Anselme précise clairement la différence entre la réalité en pensée (qui peut être associée au nominalisme) et la réalité dans le monde. Tout son travail est de faire passer notre « conception » intellectuelle de Dieu en une réalité du monde. Nous reviendrons sur ce point avec Gödel.

L'œuvre d'Anselme est curieuse : il utilise les paradoxes de l'infini (Dieu) à des fins positives contrairement aux Grecs qui y voyaient des apories. Et comme il admet d'un seul coup l'infini actuel, les hésitations n'ont plus cours car il croit en Dieu, le seul infini.

Pour Anselme, pas d'écart entre la pensée et son objet.

*L'existence est-elle prouvée par l'essence ?*

Comme en théorie des ensembles, Anselme prétend prouver l'existence de quelque chose (Dieu) à travers ses qualités. Est-ce bien licite ? Cela n'est pas certain. Dans *Roland furieux* de l'Arioste, on ne sait pas si la jument de Roland n'est pas un être mythique : elle a toutes les qualités, mais existe-t-elle ?

Nous avons vu qu'en biologie de l'évolution, la notion d'espèce est commode pour classer les plantes et leur évolution, donc elle a les qualités qu'on lui demande. Le problème que je voudrais soulever est : quand a-t-on le droit d'introduire une notion comme celle de l'espèce et quelle est sa réalité ?

Dans ce rôle de bouffon que je me suis attribué, faute de compétences, je vous invite à gambader un peu. Le bouffon ironisait sur le savoir et la sagesse des rois, mais il ne prétendait pas à l'échange des rôles et je me garderai bien de briguer une savante discussion sur la naissance des structures.

*Quelle est la réalité des particules quantiques ?*

Je voudrais simplement dire que l'obstacle n'existe que lorsque l'on y pense, mais qu'il crée comme un gène en sciences quand on ne s'attaque pas franchement à la question. J'ai connu des étudiants qui avait peine à croire à la réalité des théories et quand ils passaient au laboratoire, oubliait toutes leur connaissance théorique : ils étaient hyper nominaliste.

Mais nous le sommes tous un peu. Pensez au moyen de preuve de l'existence des particules élémentaires, du genre boson de Higgs. Au mieux nous croyons à la réalité des modèles pas à la réalité des particules. Et d'ailleurs depuis la mécanique quantique nous savons que nous ne pouvons isoler un électron pour le photographier car en faisant cela nous lui conférons une vitesse infinie. Donc nous croyons à la cohérence des théories, pas toujours à la réalité des structures qu'elle étudie.

Revenons aux qualités essentielles de « l'existence ». Quand j'étais en Terminale et que l'on nous donnait à calculer une dérivée, il fallait psalmodier, « Supposons que la dérivée existe ». Sinon, on n'avait pas la moyenne. En effet, depuis les travaux du bon Weierstrass, nous pouvons trouver d'étonnantes qualités à quelque chose qui n'existe pas, c'est la jument de Roland. Par exemple que 1 est le plus grand nombre entier car pour tout autre entier, le carré de ce nombre est plus grand que ce nombre, donc le plus grand nombre entier est 1. Donc, apprenti bachelier, je disais

« Supposons que la dérivée existe » et comme le calcul n'avait ni prouvé, ni invalidé son existence, je me sentais frustré.

N'oublions pas que les éléments de l'ensemble vide ont toutes les propriétés que l'on veut, car cet ensemble n'a aucun élément. Prenez deux ensembles disjoints aux propriétés aussi éloignées que vous voulez, leur intersection est l'ensemble vide dont les éléments, s'ils existaient, auraient toutes les propriétés des deux ensembles.

L'ensemble des ensembles existe-t-il ? Pour les réalistes non car la cardinalité de l'ensemble de ses parties est supérieure à la cardinalité de l'ensemble. Donc quand il se regarde dans le miroir il n'est jamais le plus bel, le plus gros des ensembles. Les nominalistes triomphent. Mais on peut changer le système d'axiomes (changer les règles du langage, merci Abélard) pour qu'il ait une réalité (merci Bernard).

### *Trio français et trio russe*

Depuis le Moyen Âge l'infini et Dieu sont souvent associés. Dans un ouvrage qui vient de sortir, *Au nom de l'infini*, de Jean-Michel Kantor et Loren Graham, les auteurs racontent comment la croyance de mathématiciens russes (essentiellement Florenski, Egorov et Luzin en la prière à Jésus leur a permis de penser que les ensembles qu'ils inventaient et qu'ils nommaient avaient une certaine réalité ; ils purent ainsi progresser. En opposition le trio français de Baire, Lebesgue et Borel, très rationaliste, s'était découragé. Borel avait abandonné la théorie des ensembles parce qu'il envisageait des ensembles (les nombres normaux où la fréquence d'apparition de tout *n-uplet* est équirépartie dans toute la base) dont il ne pouvait donner aucun élément, ce qui le frustrait: il ne pouvait en construire un seul). Selon Borel, presque tous les nombres réels sont normaux... Mais en contrepartie, l'ensemble des nombres non-normaux n'est pas dénombrable (il y a une infinité non dénombrable de réels dont l'expansion décimale ne contient pas le chiffre 2 et aucun de ceux-ci n'est normal...).

Et quand les éléments n'existent pas, on les invente. Ainsi les couleurs de l'arc-en-ciel : il n'y a aucune raison de distinguer quatre ou sept couleurs. Là les nominalistes ont raison.

Ainsi les rapports entre l'existence et l'essence sont difficiles à séparer, et les pièges sont nombreux. Quand Sartre dit que *L'existence précède l'essence*, il ne définit pas l'existence de quoi. C'est à des fins didactiques, pour exprimer que nous naissons avec une totale liberté. Comme d'habitude chez Sartre, les arguments ne sont pas une recherche de la vérité mais la contribution à sa fantaisie morale.

### *Invention et découverte*

La querelle entre réalistes et nominalistes a pris une nouvelle tournure : certains croient que les vérités mathématiques préexistentes

sont découvertes, qu'elles vivent attendant notre recherche perspicace dans une sorte de caverne d'Ali Baba scintillante de théorèmes. D'autres pensent que ce sont des entités inventées par le cerveau humain. Il semble que les réalistes, par la bouche d'Alain Connes notamment, aient un argument fort : si les mathématiques étaient inventées, disent-ils, elles seraient moins difficiles. Elles existeraient ainsi hors de notre cerveau.

Nous nous égarons : toutes les classifications qui permettent les déductions sont fondées sur de pareils syllogismes : tel membre d'une espèce a telle propriété et donc est membre de l'ensemble et en a certaines autres caractéristiques. Bel et bon, cela fonctionne dans le syllogisme :

Tous les hommes sont mortels,  
Socrate est un homme,  
Donc Socrate est mortel.

Nous supposons là que « Tous les hommes » a une réalité sur laquelle on peut raisonner indépendamment du cas de Socrate, sinon il nous faudrait prouver que Socrate est mortel avant d'affirmer que tous les hommes sont mortels.

Donc l'histoire des sciences et peut-être de la pensée serait un perpétuel affrontement entre le réalisme et le nominalisme. Il est pitoyable que nous ne puissions pas trancher et que nous soyons condamnés à construire le monde réel à travers les insuffisances de notre pensée incertaine. Samuel Butler résume ce paradoxe de « l'incertitude de toute certitude » dans la connaissance (ou de la *certitude d'incertitude*) : « On ne peut être sûr de rien, ni même du fait qu'on ne peut être sûr de rien ».

Un clin d'œil pour finir. Robert Benchley ironise sur la notion d'appartenance : « Il existe deux sortes de gens : ceux qui croient que la population du monde peut être divisée en deux sortes de gens, et les autres ».

### **Bibliographie**

*Le dieu d'Anselme et les apparences de la raison*, Jules Vuillemin, Aubier-Montaigne, 1971.

*Le trésor des paradoxes*, Philippe Boulanger et Alain Cohen, Belin 2007.  
*Abelard, a medieval life*, Clanchy, Blackwell, 1997.

*Au nom de l'infini : mysticisme religieux et créativité mathématique*, Jean-Michel Kantor et Loren R. Graham, Pour la Science, 2010.

<http://peccatte.karefil.com/Quasi/PutnamWMT.html>