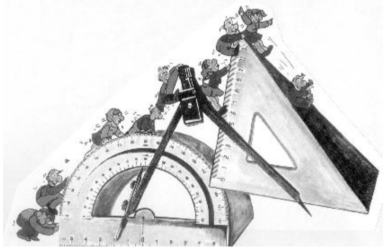

Rallye du Centenaire

Équipe n° …

Champollion n°2
Au pied des pyramides : des fractions égyptiennes

Les anciens égyptiens utilisaient des fractions, mais seulement de numérateur 1, c'est-à-dire de la forme $\frac{1}{n}$.

Toute fraction $\frac{p}{q}$ s'écrit comme somme de fractions égyptiennes ; il suffit de répéter la même fraction : $\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+...+\frac{1}{q}$. Mais on peut se demander s'il est toujours possible de l'écrire comme somme de fractions égyptiennes **de dénominateurs tous différents**.

Une telle écriture, si elle existe, s'appellera **décomposition égyptienne**. *Exemple* : $\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$.

1) Un exemple : une décomposition égyptienne de $\frac{5}{17}$.

Pour cela, déterminons d'abord la plus grande fraction égyptienne inférieure ou égale à $\frac{5}{17}$: $\frac{1}{4}$.

Calculons ensuite $\frac{5}{17}-\frac{1}{4}$. Nous trouvons $\frac{3}{68}$; pour le moment nous obtenons donc $\frac{5}{17}=\frac{1}{4}+\frac{3}{68}$.

Recommencer le procédé en remplaçant $\frac{5}{17}$ par $\frac{3}{68}$:

$\frac{5}{17}$	$\frac{3}{68}$	$\frac{1}{1564}$		
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{23}$			

La décomposition obtenue est donc : $\frac{5}{17}=\frac{1}{4}+\frac{1}{23}+\frac{1}{1564}$

2) Trouver par la méthode décrite au 2) une décomposition de $\frac{101}{102}$.

Présenter les résultats intermédiaires et la décomposition dans le tableau suivant :

<table>
<tr><td>$\frac{101}{102}$</td><td>$\frac{50}{102}=\frac{25}{51}$</td><td>$\frac{8}{51}$</td><td>$\frac{5}{357}$</td><td>$\frac{1}{8568}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{1}{7}$</td><td>$\frac{1}{72}$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">Réponse : $\frac{101}{102}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{72}+\frac{1}{8568}$</td></tr>
</table>

3) Cette méthode permet-elle de décomposer n'importe quelle fraction ?

<table>
<tr><td>Observer les numérateurs des fractions successives obtenues à chaque étape à la première ligne des tableaux des questions 1) et 2). Que constate-t-on ?</td><td colspan="2">Les numérateurs de la 1ère ligne sont toujours strictement décroissants (tout en restant des entiers strictement positifs) *</td></tr>
<tr><td>En supposant que cette constatation s'avère vraie pour toute fraction, que peut-on conclure ?</td><td colspan="2">Pour toute fraction, le processus ci-dessus s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes, puisqu'il n »y a qu'un nombre fini de numérateurs disponibles.</td></tr>
<tr><td>Pour $\frac{18}{47}$, sans faire de calcul, peut-on être sûr d'obtenir le résultat</td><td>en moins de 15 étapes ?</td><td>Non
(a priori, il peut y avoir jusqu'à 17 étapes)</td></tr>
</table>

	en moins de 25 étapes ?	Oui (en fait 3 étapes suffisent)

*** Preuve** : Soit une fraction $\frac{p}{q}$ (irréductible et inférieure à 1, et de numérateur strictement supérieur à 1) ;

soit $\frac{1}{a}$ la plus grande fraction de numérateur 1 inférieure ou égale à $\frac{p}{q}$: on a alors $\frac{1}{a} < \frac{p}{q} < \frac{1}{a-1}$ soit

$a-1 < \frac{q}{p} < a$

d'où l'on déduit $ap-p < q$ soit $ap - q < p$ (**).

Le passage de la fraction $\frac{p}{q}$ à la suivante (sur la ligne 1) se fait par le calcul de : $\frac{p}{q} - \frac{1}{a} = \frac{ap-q}{q}$;
d'après (**), le numérateur $ap- q$ est strictement inférieur au numérateur p ; le résultat est a fortiori vrai si l'on simplifie la fraction $\frac{ap-q}{q}$ en une fraction $\frac{p'}{q'}$ où $p' < ap-q$.