

Titre	Catégories	Thème	Origine
1. Le papier de François	3 4	pavage d'une surface	2 ^e RMR
2. Les sportifs	3 4	partition d'ensemble	2 ^e RMR
3. Les balances	3 4	déduction logique	3 ^e RMR
4. Visites chez grand-mère	3 4 5	multiples communs	UD
5. Le tournoi de basket	3 4 5 6	combinatoire	LO
6. Les cubes de Zoé - I	4 5 6 7	décompositions additives d'un entier	BB
7. Au théâtre	5 6 7	suite arithmétique	MI
8. La bibliothèque	5 6 7	géométrie 3D, représentation plane	UD
9. Le poids des billes - I	5 6 7	déduction logique	LU
10. Points de vue	5 6 7 8	géométrie 3D, représentation plane	3D&LU
11. Au supermarché	6 7 8	équations	SI
12. Quel beau coquillage !	7 8 9 10	probabilités	LY
13. Le poids des billes - II	8 9 10	déduction logique	LU
14. Les cubes de Zoé - II	8 9 10	décompositions additives d'un entier	BB
15. Téléphone mobile	8 9 10	fonctions	LU & FC
16. À la recherche du nombre perdu	8 9 10	équations	BB
17. La pyramide de Sophie	9 10	géométrie 3D, mesures	PR
18. Roses et tulipes	9 10	équations	SI

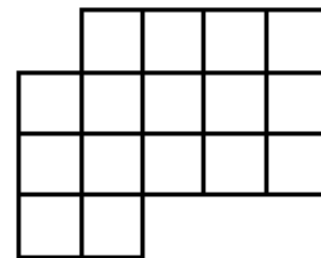
1. LE PAPIER DE FRANÇOIS (Cat. 3, 4)

François a trouvé ce morceau de papier quadrillé.

Il veut le découper en trois pièces.

Il décide que :

- les trois pièces doivent être pareilles, elles doivent toutes avoir la même forme.
- chaque pièce doit être faite de plusieurs carrés entiers.



Dessinez les trois pièces sur le morceau de papier quadrillé et coloriez chaque pièce avec une couleur différente.

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

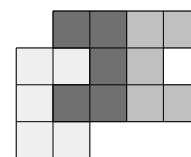
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Partager une surface quadrillée en trois figures isométriques qui sont des assemblages de carrés.

Analyse de la tâche

- Comprendre que la totalité de la surface doit être découpée en trois pièces, que le contour de chaque pièce doit suivre des lignes du quadrillage, que les trois pièces doivent être superposables mais qu'elles ne sont pas nécessairement orientées de la même façon.
- Procéder par essais inorganisés : dessiner une première pièce et chercher à dessiner sur la surface restante deux pièces identiques ; procédure qui a peu de chance d'aboutir.
- Dénombrer les carrés contenus dans la surface (15) et en déduire que chaque pièce doit être faite de 5 carrés.
Procéder par essais successifs en ajustant la forme des pièces : dessin d'une première pièce faite de 5 carrés choisie de façon aléatoire ou découpe de 3 pièces identiques, constater qu'elle ne permet pas de paver la surface, adapter progressivement l'agencement des 5 carrés compte tenu des contraintes géométriques perçues. Cette procédure n'est pas certaine d'aboutir.
- Rechercher différentes façons d'assembler 5 carrés et pour chaque forme trouvée, essayer de paver la surface avec 3 pièces identiques découpées ou dessinées sur la surface.
Arrêter la recherche quand un pavage a été trouvé.



Attribution des points

- 4 Réponse correcte (les trois pièces dessinées et coloriées) et une explication de la manière dont la recherche s'est faite (on a essayé des formes, on a vu que chaque pièce devait avoir 5 carrés et on a essayé des formes faites de 5 carrés, dessins de plusieurs tentatives successives, ...). L'explication de l'unicité de la réponse n'est pas demandée
- 3 Réponse correcte (les trois pièces dessinées et coloriées), sans explication
- 2 Début de raisonnement correct : pavage avec trois pièces, chacune de cinq carrés, mais seulement deux sont identiques
- 1 Présentation d'une recherche montrant que chacune des trois pièces doit contenir 5 carrés
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : D'après Rallye Mathématique romand 02.2.09

2. LES SPORTIFS (Cat. 3, 4)

La maitresse a fait une enquête sur les sports pratiqués par les 25 élèves de sa classe.

Tous les élèves pratiquent la natation ou le basket-ball. Certains pratiquent ces deux sports.

Elle a alors proposé aux élèves de sa classe de résoudre une énigme.

Dans notre classe, 14 élèves nagent et 15 élèves jouent au basket-ball.

À vous de trouver combien d'élèves pratiquent les deux sports, natation et basket-ball.

Trouvez la réponse à l'énigme.

Expliquez comment vous avez trouvé la réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver le nombre d'éléments de l'intersection de deux ensembles connaissant le nombre d'éléments de chaque ensemble et celui de leur réunion.

Analyse de la tâche

- Comprendre les données de la situation : chacun des 25 élèves pratique au moins un des deux sports, certains élèves en pratiquent deux, le nombre de pratiquants de chaque sport est connu.
- Procéder par essais sur les 3 nombres (pratiquants de chacun des sports seul et pratiquants des 2 sports) et vérification du nombre d'élèves pratiquant chacun des sports et du nombre total d'élèves.
- Procéder par essais et ajustements, à partir du nombre d'élèves pratiquant les deux sports et en déduire les conséquences. Par exemple, si ce nombre était égal à 8, 6 élèves ne pratiqueraient que la natation, 7 élèves ne pratiqueraient que le basket-ball et le nombre total d'élèves de la classe serait égal à 21. D'autres essais sont nécessaires pour savoir s'il faut augmenter ou diminuer le nombre testé.
- Considérer que si aucun élève ne pratiquait les deux sports, le nombre d'élèves de la classe serait égal à 29 (14 + 15). En déduire que 4 des élèves (29 - 25) pratiquent donc les deux sports. Vérifier que $10 + 11 + 4 = 25$.

Remarque : Compte-tenu des pratiques actuelles d'enseignement, le recours à un diagramme (Venn ou Carroll) est peu vraisemblable.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (4 élèves) avec des explications ou schématisations complètes et claires
- 3 Réponse correcte (4 élèves) avec des explications ou schématisations incomplètes ou peu claires (par exemple avec au moins un calcul pour vérifier que le nombre total d'élèves est bien égal à 25)
- 2 Réponse correcte (4 élèves) sans explication
ou réponse erronée due à une erreur de calcul, mais avec des explications complètes et claires
- 1 Début de recherche correct montrant que les contraintes de la situation ont été comprises
- 0 Incompréhension du problème

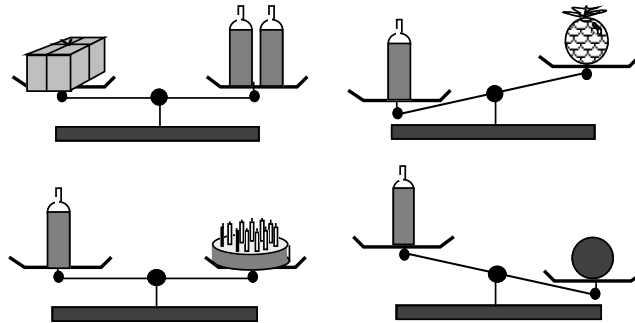
Niveaux : 3, 4

Origine : D'après Rallye Mathématique romand 02.F.03

3. LES BALANCES (Cat. 3, 4)

Sur sa table, Julie a six objets : deux bouteilles de même poids, un paquet, un ananas, un gâteau, une boule.

Elle fait quatre pesées avec certains de ces objets comme le montrent les dessins ci-dessous :



Quel est l'objet le plus léger : une bouteille, le paquet, l'ananas, le gâteau ou la boule ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

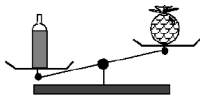
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

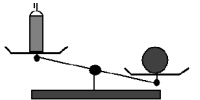
Déterminer parmi six objets différents quel est le plus léger en effectuant des déductions à partir de plusieurs pesées traduisant soit l'égalité, soit l'inégalité des masses de certains de ces objets, en utilisant entre autres la transitivité.

Analyse de la tâche

- Savoir interpréter correctement les équilibres ou déséquilibres d'une balance et savoir lire de deux façons un déséquilibre, par exemple :

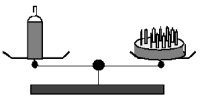


« une bouteille est plus lourde que l'ananas » ou « l'ananas est plus léger qu'une bouteille » ;

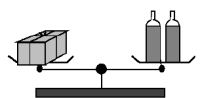


« la boule est plus lourde qu'une bouteille » ou « une bouteille est plus légère que la boule ».

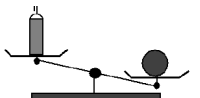
- Faire une hypothèse sur l'objet le plus léger et vérifier si cette hypothèse est compatible avec chacune des quatre pesées.
- Comprendre qu'une bouteille au moins étant présente dans chaque pesée sur l'un des plateaux, la masse de tous les autres objets va pouvoir être comparé à celui d'une bouteille.
- Tirer des informations de chaque dessin et les traiter en les mettant en relation avec d'autres, par exemple :



la masse du gâteau et d'une bouteille est la même. Quand on aura une information sur l'un, on aura la même information sur l'autre.



le paquet a la même masse que deux bouteilles, il est donc plus lourd qu'une bouteille.



la boule est plus lourde qu'une bouteille.

De ces trois informations, déduire qu'une bouteille est plus légère que le paquet et que la boule, et qu'elle a la même masse que le gâteau.



De déduire que l'ananas est plus léger qu'une bouteille et donc qu'il est plus léger que tous les autres objets.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (l'ananas) avec explications claires et complètes (interprétation de chaque pesée et déductions qui conduisent à la conclusion)
- 3 Réponse correcte avec explications partielles (manque d'une déduction ou d'une étape dans le raisonnement)
- 2 Réponse correcte sans explications
ou absence de réponse ou réponse erronée, mais interprétation correcte de chaque pesée et deux déductions correctes.
- 1 Début de raisonnement correct, par exemple interprétation correcte d'au moins 2 pesées dont une correspondant à un déséquilibre mais absence de traitement ou traitement qui n'a pas abouti ou présence d'une seule déduction
ou réponse par l'un des 2 objets les plus lourds (la boule ou le paquet) due à une lecture inversée des informations apportées par les balances et avec des explications cohérentes
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : D'après Rallye Mathématique romand 03.2.03

4. VISITES CHEZ GRAND-MÈRE (Cat 3, 4, 5)

Aujourd'hui, 1^{er} juin, Ariane, Bruno et Céleste rendent visite à leur grand-mère. Le soir, lorsqu'ils lui disent au-revoir, leur grand-mère leur demande : *Quand allez-vous revenir ?*

Ariane affirme : *Ce mois-ci, je viendrai un jour sur deux. Aujourd'hui, je suis venue, donc demain je ne viendrai pas, mais après-demain je viendrai...*

Bruno dit : *Moi, je viendrai moins souvent car j'ai beaucoup de travail à l'école. Je viendrai un jour, puis je ne viendrai pas pendant quatre jours et ainsi de suite. Aujourd'hui nous sommes le 1^{er} juin, ma prochaine visite sera donc le 6 juin.*

Céleste déclare : *Moi, un jour je viendrai, puis je ne viendrai pas pendant trois jours et ainsi de suite pendant tout ce mois de juin. Ma prochaine visite sera donc le 5 juin.*

À quelle date les trois petits-enfants seront-ils à nouveau ensemble chez leur grand-mère au mois de juin ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver le 1^{er} élément commun, autre que 1, à 3 suites arithmétiques de premier terme 1 et de raisons 2, 4 et 5.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les jours de visites de chaque enfant vont de 2 en 2, de 4 en 4 ou de 5 en 5, à partir de 1 et que les jours possibles vont du 1er au 30 juin.
- Établir la liste des jours de visite de chaque enfant et constater que le seul jour commun est le 21 juin.

Ariane	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
Bruno	1	6	11	16	21	26									
Céleste	1	5	9	13	17	21	25	29							

- Ou construire (ou utiliser) le calendrier du mois de juin (du 1er au 30 juin) et y noter, par exemple par leurs noms, les jours de visite de chaque enfant et constater que le seul jour commun est le 21 juin.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (21 juin) avec des explications claires et complètes
- 3 Réponse correcte avec des explications peu claires ou incomplètes, ou réponse incorrecte avec une erreur de calcul, mais des explications claires
- 2 Réponse correcte sans explication
- 1 Début de raisonnement correct (par exemple au moins une suite correcte de 5 jours pour un des enfants)
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Udine

5. LE TOURNOI DE BASKET (Cat. 3, 4, 5, 6)

Julie doit organiser un tournoi de basket entre les cinq classes de son école. Chaque classe est désignée par une lettre : A, B, C, D, E.

Chaque classe doit jouer deux matchs contre chacune des autres classes, un match aller et un match retour.

Le responsable du terrain de basket demande à Julie combien de matchs seront joués pendant ce tournoi.

Quelle réponse Julie doit-elle donner au responsable du terrain de basket ?

Expliquer comment vous avez trouvé ce que Julie doit répondre.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Calculer le nombre de combinaisons possibles de 5 éléments pris 2 à 2, chaque combinaison étant considérée deux fois.

Analyse de la tâche

- Comprendre que chaque classe doit jouer deux matchs contre chacune des autres classes.
- Faire l'inventaire des matchs possibles avec toutes les classes, de façon organisée ou non (mais dans ce cas en s'assurant à la fin qu'il n'y a pas eu d'oubli ou de répétition), puis doubler le nombre de matchs obtenus, par exemple sous la forme :

AB BC CD DE
 AC BD CE
 AD BE
 AE

Ou faire l'inventaire des doubles matchs possibles avec toutes les classes (en considérant les matchs aller et retour), de façon organisée ou non (mais dans ce cas en s'assurant à la fin qu'il n'y a pas eu d'oubli ou de répétition), par exemple sous la forme :

AB – BA BC – CB CD – DC DE – ED
 AC – CA BD – DB CE – EC
 AD – DA BE – EB
 AE – EA

Ou considérer que chaque classe fait 4 matchs avec chacune des autres classes (ce qui assure que les matchs aller et retour sont pris en compte) et calculer, soit $4 + 4 + 4 + 4 + 4$, soit 4×5 .

Ou considérer que chaque classe dispute 2 matchs contre chacune des autres équipes, donc dispute 8 matchs. En tenant compte du fait que chaque match est ainsi compté 2 fois, arriver à $(8 \times 5) : 2$.

Ou compter 25 matchs (5×5) et en retirer 5 car on ne joue pas contre soi-même (sous forme de calcul ou de tableau).

Attribution des points

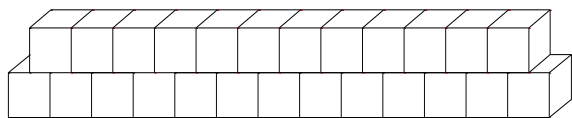
- 4 Réponse correcte (20 matchs) avec une procédure explicite (inventaire détaillé ou calcul justifié)
- 3 Réponse correcte (20 matchs) avec une procédure incomplète ou non justifiée (par exemple calcul de 5×4) ou réponse à au plus 2 matchs près (de 18 à 22 matchs) avec une procédure explicite (inventaire détaillé), mais répétition ou oubli d'un ou deux matchs.
- 2 Réponse avec seulement un match avec chaque autre classe (10 matchs) avec une procédure explicite (inventaire détaillé ou calcul justifié) ou réponse correcte ou approchée (de 18 à 22 matchs) sans explication ou avec un calcul non justifié ou réponse 25 matchs (oubli du retrait de 5 matchs après le calcul 5×5) avec des explications claires et complètes
- 1 Réponse « 10 matchs » ou « 25 matchs », sans explication ou début de recherche correcte, avec au moins 5 matchs inventoriés
- 0 Incompréhension du problème ou début de recherche avec moins de 5 matchs inventoriés

Niveaux : 3, 4, 5, 6

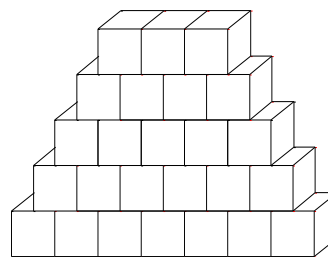
Origine : Lodi

6. LES CUBES DE ZOÉ - I (Cat. 4, 5, 6, 7)

Zoé fait des empilements de cubes en respectant cette règle : à chaque étage, il y a exactement un cube de moins qu'à l'étage qui est juste en dessous. Elle a déjà réalisé ces deux empilements différents qui contiennent chacun exactement 25 cubes.



Avec 2 barres de 13 et 12 cubes



Avec 5 barres de 7, 6, 5, 4 et 3 cubes

Zoé a essayé de faire deux empilements différents avec 10 cubes chacun, en respectant la même règle. Elle n'y est pas arrivée. Elle se demande s'il est possible de faire deux empilements différents avec moins de 25 cubes en respectant toujours la même règle.

Trouvez tous les nombres de cubes inférieurs à 25 qui permettent de faire au moins deux empilements différents, en respectant la même règle.

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer un entier naturel inférieur à 25 ayant 2 décompositions trapézoïdales (décompositions en sommes d'entiers consécutifs).

Analyse de la tâche

- Comprendre la situation d'empilement à l'aide du texte et des dessins.
- Rester dans le cadre géométrique et essayer de façon organisée ou non de réaliser un schéma à l'aide de carrés répondant aux contraintes de l'énoncé et identifier celles qui répondent à la question posée.
- Passer au cadre numérique et comprendre qu'il s'agit de chercher des décompositions additives à l'aide d'entiers consécutifs pour les entiers inférieurs à 25 et ayant au moins 2 décompositions trapézoïdales.
- Procéder alors de façon systématique en cherchant toutes les décompositions trapézoïdales des entiers en débutant par les premiers entiers, et trouver les nombres trapézoïdaux qui apparaissent au moins deux fois. On a :
 Sommes de deux entiers : 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13 ; 15 ; 17 ; 19 ; 21 ; 23
 Sommes de trois entiers : 6 ; 9 ; 12 ; 15 ; 18 ; 21 ; 24
 Sommes de 4 entiers : 10 ; 14 ; 18 ; 22
 Sommes de 5 entiers : 15 ; 20
 Sommes de 6 entiers : 21 où les nombres qui apparaissent au moins deux fois sont 9, 15, 18 et 21.

Ou procéder par essais additifs plus ou moins organisés et aboutir à certains des nombres cherchés (ou à tous !).

Attribution des points

- 4 Réponse complète exacte (9 ; 18 ; 15 et 21) avec explications claires et complètes (sans autre nombre erroné)
- 3 Réponse complète exacte avec explications incomplètes ou peu claires (sans autre nombre erroné)
ou réponse avec 5 nombres dont les 4 corrects (9 ; 18 ; 15 et 21) et soit 25, soit un autre incorrect (dû à une erreur de calcul), mais avec explications claires
ou 3 des nombres cherchés avec explications claires, sans autre nombre erroné
- 2 Les 4 nombres cherchés avec au plus 2 autres nombres erronés
ou 3 des nombres cherchés avec explications incomplètes ou peu claires et éventuellement un autre nombre erroné consécutif à une erreur de calcul
ou 1 ou 2 des nombres cherchés avec explications claires sans autre nombre erroné
- 1 Réponse avec au moins un nombre qui n'a qu'une décomposition (sans autre nombre erroné)
ou au moins un des nombres cherchés avec plusieurs autres nombres erronés ou sans explications
- 0 Incompréhension du problème

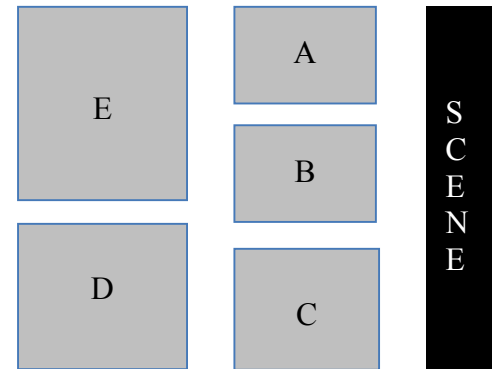
Niveaux : 4, 5, 6, 7

Origine : Bourg en Bresse

7. AU THÉÂTRE (Cat. 5, 6, 7)

Une salle de théâtre peut accueillir 160 spectateurs.

Les fauteuils sont répartis dans cinq zones, marquées sur ce plan. Chaque zone contient un nombre de fauteuils différent de celui des autres zones. Il y a toujours 4 fauteuils en plus quand on passe d'une zone à la suivante, de la zone A à la zone B, de la zone B à la zone C, de la zone C à la zone D et de la zone D à la zone E.



Combien y a-t-il de fauteuils dans les zones A et E ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver 5 termes successifs d'une suite arithmétique de raison 4, dont la somme est égale à 160.

Analyse de la tâche

- Comprendre les contraintes de la situation : chaque zone comporte 4 fauteuils de plus que la précédente, le nombre total de fauteuils étant égal à 160.
- Procéder par essais et ajustements. Par exemple, si la zone A comportait 10 fauteuils, les suivantes en comporteraient 14, 18, 22 et 26 et le nombre total de fauteuils serait égal à 90. Il faut donc essayer avec un nombre plus grand, etc.
- Commencer de la même manière et constater qu'il manque 70 fauteuils, c'est-à-dire 14 fauteuils par zone (puisque $70 : 5 = 14$). En déduire que la première zone comporte 24 fauteuils et la dernière 40 fauteuils.

Ou : faire un premier essai, puis raisonner pour trouver les nombres cherchés. Essayer, par exemple, 10 fauteuils pour la plus petite zone, les suivantes en comporteraient alors 14, 18, 22 et 26 et le nombre total de fauteuils serait égal à 90. Puis ajouter par exemple 5 fauteuils à chaque zone et constater que le nombre total de fauteuils augmente de 25, soit un total de 115 fauteuils. Continuer jusqu'à atteindre 160 fauteuils.

Ou : considérer le nombre de fauteuils qui surpassent celles de la première zone dans les zones suivantes ($4 + 8 + 12 + 16 = 40$ fauteuils). En enlevant ces fauteuils (il en reste alors 120), on obtient 5 zones de même taille. On en déduit que la première comporte donc 24 fauteuils (car $120 : 5 = 24$) et la dernière en comporte donc 40 ($24 + 4 + 4 + 4 + 4 = 40$).

Ou : considérer que la zone médiane comporte un cinquième des fauteuils (donc $160 : 5 = 32$), la plus petite en comporte 8 de moins (donc 24) et la plus grande 8 de plus (donc 40). Cette procédure est peu probable.

Remarque : une solution algébrique (avec mise en équation) n'est pas envisageable aux niveaux considérés.

Attribution des points

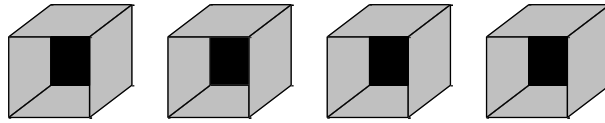
- 4 Réponse correcte (24 et 40 fauteuils) avec des explications complètes et claires
- 3 Réponse correcte (24 et 40 fauteuils) avec des explications incomplètes ou peu claires (avec par exemple au moins un calcul pour vérifier que $24 + 28 + 32 + 36 + 40 = 160$)
- 2 Réponse correcte (24 et 40 fauteuils) sans explication
ou réponse incomplète (un seul des deux nombres : 24 ou 40) avec des explications complètes et claires
ou réponse incorrecte due à une erreur de calcul, mais avec des explications complètes et claires
ou absence de réponse explicite, mais des explications complètes et claires
- 1 Début de recherche correct montrant que les contraintes de la situation ont été comprises (prise en compte de la progression du nombre de fauteuils par zone de raison 4)
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Milano

8. LA BIBLIOTHÈQUE (Cat. 5, 6, 7)

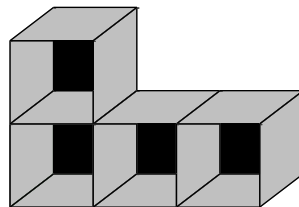
Inès a acheté quatre boîtes identiques en forme de cube. Chaque boîte a une face ouverte à l'avant. Inès a aussi acheté 10 feuilles de papier de couleur de forme carrée, chaque feuille pouvant recouvrir exactement une des faces d'une boîte.



Avec ces boîtes, elle veut construire une petite bibliothèque en respectant les contraintes suivantes :

- la bibliothèque doit être construite en assemblant les 4 boîtes ;
- chaque boîte doit avoir au moins une face qui est collée exactement contre celle d'une autre boîte ;
- toutes les faces ouvertes doivent être du même côté, sur le devant de la bibliothèque ;
- l'extérieur de chaque face des boîtes qui n'est pas collée contre une face d'une autre boîte doit être recouvert d'une feuille de couleur, sauf pour les faces qui reposent sur le sol.

Voici un exemple de bibliothèque, mais pour celle-ci 11 feuilles de papier de couleur sont nécessaires.



Quels assemblages Inès peut-elle réaliser avec ces quatre cubes de façon à ne pas avoir à racheter de feuilles de papier de couleur ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

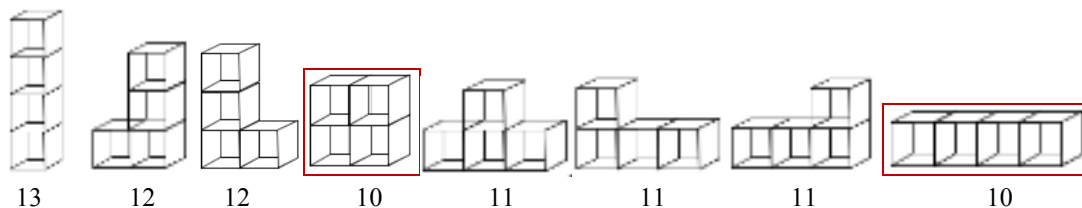
Dresser l'inventaire des assemblages face contre face de quatre boîtes cubiques comportant chacune cinq faces et orientées de la même façon, puis compter pour chaque assemblage, les faces « visibles » extérieures.

Analyse de la tâche

- Interpréter la représentation donnée en exemple et à partir de celle-ci et du texte, comprendre que l'assemblage des boîtes cubiques doit respecter les contraintes indiquées : chaque boîte cubique doit avoir au moins une face qui coïncide avec une face d'une autre boîte cubique, toutes les boîtes cubiques doivent être orientées dans le même sens (face manquante vers l'avant).

Stratégies possibles :

- Recherche aléatoire des assemblages possibles de cubes (assemblage de carrés ou de cubes ou représentation en perspective) en tenant compte du nombre de faces en contact avec le sol. Pour chacun d'eux, compter le nombre de faces devant être couvertes.
- Utilisation d'une procédure systématique, par exemple en fonction du nombre de faces touchant le sol (chaque assemblage est représenté avec le nombre de faces devant être recouvertes).



- Conclure qu'il existe deux assemblages répondant aux contraintes.

Remarque : tous les assemblages comportent 4 faces qui servent de fonds et qui sont recouvertes à l'extérieur d'une feuille. Le problème peut donc se ramener à la recherche de tous les assemblages de 4 carrés identiques accolés par un côté, et ayant six côtés « libres », hormis ceux posés sur la ligne inférieure.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (les 2 assemblages dessinés : assemblages de carrés ou essais de représentation en perspective) et décompte correct des faces à recouvrir, et sans autre assemblage erroné
- 3 Réponse correcte (les 2 assemblages dessinés) mais sans décompte apparent des faces à recouvrir et sans autre assemblage erroné
ou réponse correcte (les 2 assemblages dessinés : assemblages de carrés ou essais de représentation en perspective) et décompte correct des faces à recouvrir, avec un seul autre assemblage erroné
- 2 Un seul assemblage solution dessiné avec décompte correct des faces à recouvrir, sans autre assemblage qui n'est pas solution
- 1 Un seul assemblage solution dessiné et présence d'un ou deux autres assemblages qui ne sont pas solutions, avec décompte des faces à recouvrir
- 0 Incompréhension du problème ou seulement le modèle proposé dans l'exemple

Niveaux : 5, 6, 7

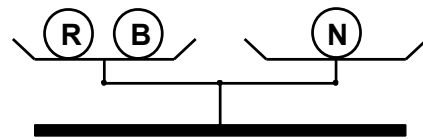
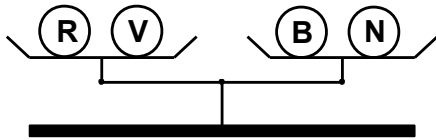
Origine : Udine

9. LE POIDS DES BILLES - I (Cat. 5, 6, 7)

Un sachet renferme 4 billes de couleurs différentes : une rouge (R), une verte (V), une bleue (B) et une noire (N).

Les billes ont toutes des poids différents : 1g, 2g, 3g et 4g.

Voici deux pesées réalisées avec ces billes :



Quel peut être le poids de chacune des billes ? S'il y a plusieurs possibilités, trouvez les toutes.

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

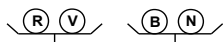
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique :

Exploiter des égalités données par des équilibres d'une balance et des données numériques sur les masses de quatre objets pour déterminer le poids de chacun d'eux.

Analyse de la tâche

- Savoir interpréter correctement les équilibres d'une balance :



De déduire que $R + V = B + N$ (1)



et de que $R + B = N$ (2)

- Attribuer un poids parmi 1g, 2g, 3g et 4g à chaque bille et tester si les deux égalités sont vraies. Si les valeurs ne sont pas solutions, tester une autre répartition des masses entre les quatre billes. Si les valeurs sont solutions, tester d'autres répartitions des masses pour rechercher si d'autres solutions existent. Cette démarche nécessite beaucoup de rigueur pour ne pas oublier de possibilités et arriver à la conclusion que le problème n'a que deux solutions.
- Partir de l'égalité (1) et chercher comment avec les nombres 1, 2, 3 et 4 obtenir deux sommes égales : $1 + 4 = 2 + 3$.
Faire une hypothèse sur les masses possibles de R et V d'une part, de B et N d'autre part de façon à satisfaire cette égalité, puis vérifier si les valeurs retenues satisfont l'égalité (2). Que les valeurs choisies soient solutions ou non, recommencer en faisant une autre hypothèse sur la masse de chacune des billes qui soit compatible avec l'égalité (1) pour rechercher d'autres solutions. Toutes les hypothèses possibles doivent être étudiées pour conclure que le problème n'a que deux solutions.
- Partir de l'égalité (2) et chercher comment avec deux des nombres parmi 1, 2, 3 et 4 obtenir une somme égale à un des deux autres nombres : $1 + 2 = 3$ ou $1 + 3 = 4$.
À partir d'une des deux égalités obtenues, faire une hypothèse sur les masses de R, B et N de façon à satisfaire cette égalité, en déduire la masse de V (4^e masse) et vérifier si les valeurs retenues satisfont l'égalité (1). Que les valeurs choisies soient solutions ou non, recommencer en faisant une autre hypothèse sur les masses de R, B et N compatibles avec l'égalité (2) pour rechercher d'autres solutions. Toutes les hypothèses possibles doivent être étudiées pour conclure que le problème n'a que deux solutions.
- Procédure experte qui peut éventuellement être utilisée au niveau 7, en désignant les poids des boules par des lettres :
En partant de l'égalité (2), remplacer N par R + B dans l'égalité (1), en déduire que $V = 2B$, d'où 2 possibilités : $B = 1g$ et $V = 2g$ ou $B = 2g$ et $V = 4g$ (seules valeurs possibles puisque le poids maximum d'une bille est 4g).
En reportant ces valeurs dans l'égalité (1), déduire que : $R = 3g$ et $N = 4g$ ou $R = 1g$ et $N = 3g$.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (les deux solutions : $B = 1g$, $V = 2g$, $R = 3g$, $N = 4g$ et $R = 1g$, $B = 2g$, $N = 3g$, $V = 4g$) avec explications claires et complètes (par exemple la suite des essais ou un raisonnement) garantissant qu'il n'y a pas d'autre solution
- 3 Réponse correcte (les deux solutions) avec seulement vérification des deux pesées
- 2 Réponse partielle (une seule solution) avec vérification des deux pesées ou les 2 solutions sans explication, ni vérification
- 1 Début de raisonnement correct (essais de nombres pour vérifier les contraintes de la situation)
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7

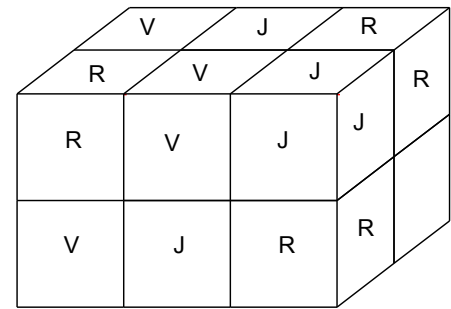
Origine : Luxembourg (réinterprétation d'un classique)

10. POINTS DE VUE (Cat. 5, 6, 7, 8)

Marc a construit un parallélépipède rectangle en assemblant quatre cubes de couleur rouge (R), quatre cubes de couleur verte (V) et quatre cubes de couleur jaune (J).

En assemblant les cubes, il a pris soin de toujours placer face contre face des cubes de couleurs différentes.

Il a ensuite dessiné sa construction sur une feuille, mais il a oublié d'indiquer la couleur du cube placé à l'arrière, en bas, à droite.



De quelles couleurs peuvent être les cubes placés à l'arrière et en bas de l'assemblage de Marc : celui de gauche qu'on ne voit pas, celui du milieu qu'on ne voit pas non plus et celui de droite dont on ne voit qu'une face ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Un parallélépipède rectangle est construit en assemblant 12 cubes de trois couleurs différentes, de sorte que deux faces en contact soient de couleurs différentes. Il s'agit de déduire des indications de couleurs portées sur une représentation de cet assemblage les couleurs possibles de chacun des cubes qui ne sont pas ou que partiellement visibles sur le dessin.

Analyse de la tâche

- Comprendre que, pour chaque cube, les six faces sont de la même couleur.
- Comprendre qu'un cube est partiellement visible sur le dessin et que deux ne le sont pas du tout et qu'il s'agit de déterminer les couleurs possibles pour chacun de ces trois cubes.
- Prendre en compte les deux contraintes : quatre cubes de chaque couleur et deux cubes qui sont en contact par une face sont de couleurs différentes.

Stratégies possibles :

- Faire un choix de couleurs pour les trois cubes dont on doit déterminer la couleur en veillant à ce que deux cubes contigus soient de couleurs différentes et vérifier si ce choix est compatible avec les deux contraintes en utilisant les informations fournies par la représentation en perspective.
- Sélectionner un des cubes cachés ou partiellement caché, identifier les couleurs qu'il est possible de donner à ce cube, c'est-à-dire qui soient compatibles avec les couleurs connues des cubes contigus. Puis pour chaque couleur possible pour ce cube, identifier de la même manière pour les deux cubes restant les couleurs qu'il peuvent prendre. Pour chaque triplet de couleurs ainsi obtenu, s'assurer que le parallélépipède comportera exactement quatre cubes de chaque couleur. Retenir les triplets qui vérifient cette condition.
- Ou commencer par compter le nombre de cubes de chaque couleur visibles sur le dessin : 3 vert, 3 rouge et 3 jaune. Déduire que les trois autres cubes sont respectivement vert, rouge et jaune.

Faire le choix d'un des trois cubes dont on doit déterminer la couleur, déduire des couleurs connues des cubes qui lui sont contigus les couleurs possibles pour ce cube. Sélectionner un des deux cubes dont la couleur reste à trouver et déterminer parmi les deux couleurs restantes celle(s) qui peu(ven)t convenir et s'assurer que la troisième couleur est compatible pour le troisième cube.

Pour chacune de ces stratégies, les élèves peuvent :

- soit travailler sur la représentation en perspective ;
- soit travailler sur un assemblage de 12 cubes qu'ils auront réalisés ou apportés ;
- soit travailler à partir d'un tableau.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (les deux solutions : de gauche à droite R, V, J, ou J, R, V) avec explication claire qui fait apparaître qu'il n'y a que deux solutions
- 3 Réponse correcte (les deux solutions) avec explication partielle qui ne garantit pas qu'il n'y ait que deux solutions ou réponse inversée (les deux solutions : de gauche à droite J, V, R ou V, R, J) avec explication claire qui fait apparaître qu'il n'y a que deux solutions
- 2 Réponse erronée (quatre solutions : R, V, J, ou J, R, V ou J, V, J ou J, R, J) qui ne tient pas compte du fait qu'il y a quatre cubes de chaque couleur ou une seule des deux solutions correctes avec explication complète

- 1 Une seule des deux solutions correctes sans explication
ou début de raisonnement correct (par exemple le cube de gauche ne peut pas être vert, celui du milieu ne peut pas être
jaune et celui de droite ne peut pas être rouge)
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7, 8

Origine : Groupe Géométrie de l'espace – Luxembourg

11. AU SUPERMARCHÉ (Cat. 6, 7, 8)

Ce matin, madame Louise a dépensé 34,80 euros au supermarché pour acheter du riz, de l'huile et des biscottes.

Un paquet de riz coûte 4,50 euros, une bouteille d'huile 6 euros et une boîte de biscottes 3,30 euros.

Combien de paquets de riz, combien de bouteilles d'huile, et combien de boîtes de biscottes madame Louise a-t-elle pu acheter ?

Indiquez et expliquez les réponses que vous avez trouvées.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Résoudre dans \mathbb{N} l'équation $4,50a + 6b + 3,30c = 34,80$ ($a, b, c \geq 1$)

Analyse de la tâche

- Comprendre que madame Louise a acheté au moins un produit de chaque type, puis simplifier la recherche compte tenu qu'elle a payé 13,80 euros pour un paquet de riz, une bouteille d'huile et un paquet de biscottes.
- Chercher ensuite comment avec un ou plusieurs des trois produits, elle a pu dépenser les 21 € restant. Si elle avait acheté un produit de plus de chaque type, il resterait encore 7,20 € qui ne peuvent pas s'obtenir comme combinaison d'un ou plusieurs des trois prix.
- Supposer qu'elle a acheté seulement un paquet de riz ou une bouteille d'huile ou un paquet de biscottes et faire varier les quantités des deux autres produits de façon à atteindre 21 €. Par exemple, le prix d'un paquet de riz et d'une bouteille d'huile est 10,50 € ; le complément à 21 € ne peut pas être obtenu qu'avec des paquets de biscottes. Arriver à la conclusion qu'avec 34,80 euros, elle a pu acheter **3 paquets de riz, 3 bouteilles d'huile et un paquet de biscottes.**
- Procéder de la même manière en effectuant des essais ordonnés pour chercher toutes les autres façons de dépenser 21 euros : un paquet de riz et 5 paquets de biscottes. Conclure que madame Louise a pu acheter **2 paquets de riz, une bouteille d'huile et 6 paquets de biscottes.**

La même stratégie peut être utilisée en cherchant comment il est possible d'obtenir 34,80 comme combinaison linéaire des trois nombres (4,50 ; 6 ; 3,30), chaque nombre ou un de ses multiples devant être présent dans la somme.

Ou : partir du nombre maximum de bouteilles d'huile qu'il est possible d'acheter (4). Le prix 24 € ne permet pas de dépenser la somme restante (10,80 €) avec des paquets de riz et de biscottes (on peut acheter au maximum un paquet de riz, mais avec les 6,30 €, on ne peut acheter qu'un seul paquet de biscottes à 3,30 €).

Essayer ensuite avec 3 bouteilles d'huile et trouver que l'unique possibilité de dépenser la somme restante 16,80 € est d'acheter 3 paquets de riz et un paquet de biscottes.

Continuer en faisant l'hypothèse de l'achat de deux puis d'une seule bouteille d'huile.

Ou ; comprendre que le nombre de paquets de riz doit être inférieur à 6 ($4,50 \times 6 = 27,00$), celui des bouteilles d'huile inférieur à 5 ($6 \times 5 = 30,00$), celui des paquets de biscottes inférieur à 8 ($3,30 \times 8 = 26,40$).

Observer que le nombre 80 qui correspond à la partie décimale du prix payé peut être obtenu en ajoutant 50 et 30 ou 0 et 80. En déduire que le nombre de paquets de riz achetés peut être pair ou impair (les parties décimales du prix des paquets de riz sont alors respectivement 0 ou 50) et que le nombre de paquets de biscottes achetés ne peut être que 1 ou 6 de sorte que la partie décimale du prix des biscottes soit 30 ou 80.

- Ainsi madame Louise a pu acheter un paquet de biscottes et un nombre impair de paquets de riz ou 6 paquets de biscottes et un nombre pair de paquets de riz.
- Dresser la liste des différentes possibilités et calculer le prix des paquets de riz et de biscottes :
 $1 \times 4,50 + 1 \times 3,30 = 7,80$; $3 \times 4,50 + 1 \times 3,30 = 16,80$; $5 \times 4,50 + 1 \times 3,30 = 25,80$
 $2 \times 4,50 + 6 \times 3,30 = 28,80$; $4 \times 4,50 + 6 \times 3,30 = 37,80$
- Ecarter le cas de 4 paquets de riz et 6 paquets de biscottes dont le prix dépasse le prix payé par madame Louise.
- Contrôler pour chacun des autres cas que la différence entre 34,80 et le prix du riz et des biscottes est un multiple de 6 :
 $34,80 - 7,80 = 27$
 $34,80 - 16,80 = 18$
 $34,80 - 25,80 = 9$
 $34,80 - 28,80 = 6$
- Conclure qu'il n'y a que deux solutions : 3 paquets de riz, 3 bouteilles d'huile et un paquet de biscottes ou 2 paquets de riz, une bouteille d'huile et 6 paquets de biscottes.

Ou : procéder par essais successifs. Faire une hypothèse sur les nombres de paquets de riz, de bouteilles d'huile et de paquets de biscottes (supérieurs ou égaux à 1) et calculer le prix correspondant. Cette procédure ne garantit pas l'exhaustivité des solutions.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (3 riz, 3 huiles et 1 biscotte ou 2 riz, 1 huile et 6 biscottes) avec explications qui assurent l'exhaustivité des solutions
- 3 Réponse correcte (les deux solutions) avec utilisation d'une procédure qui n'assure pas l'exhaustivité des solutions mais avec vérification
- 2 Une seule des deux solutions avec vérification
ou réponse correcte (les deux solutions) sans explications ni vérification
ou une solution correcte et une autre solution erronée consécutive à une erreur de calcul, avec explications ou vérification
- 1 Début de raisonnement correct (par exemple plusieurs essais qui tiennent compte des contraintes : au moins un article de chaque type et prix total devant être égal à 34,80 €)
ou une ou deux solutions erronées consécutives à des erreurs de calcul
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8**Origine :** Siena

12. QUEL BEAU COQUILLAGE ! (Cat. 7, 8, 9, 10)

Quatre enfants ont trouvé sur la plage un beau coquillage et chacun aimerait l'emporter chez lui.

Ils décident de le jouer aux dés. Chaque face du dé comporte un nombre différent de points, de 1 à 6. Ils fixent les règles suivantes :

Chacun lancera le dé deux fois et fera la somme des points obtenus.

Si le total est 4 points, Sarah prendra le coquillage.

Si le total est 7 points, c'est Maxime qui le prendra.

Si le total est 10 points, le coquillage sera à Adèle.

Et si le résultat est 12 points, il sera à Nora.

Si le total est un nombre différent, personne ne gagne et ils devront rejouer une partie.

Adèle refuse de jouer parce qu'elle pense que tout le monde n'a pas la même chance de gagner.

Adèle a-t-elle raison ?

Indiquez le nombre de possibilités que chaque enfant a de gagner.

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer les possibilités d'obtenir les nombres 4, 7, 10, 12 en additionnant deux nombres entiers compris entre 1 et 6, l'ordre des termes dans la somme ayant une importance et un même nombre pouvant être utilisé deux fois.

Analyse de la tâche

- Calculer toutes les façons d'obtenir 4 (1+3 ; 2+2 ; 3+1), 7 (1+6 ; 2+5 ; 3+4 ; 4+3 ; 5+2 ; 6+1), 10 (4+6 ; 5+5 ; 6+4) et 12 (6+6). En déduire le nombre de possibilités que chaque enfant a de gagner : Sarah a 3 possibilités, Maxime 6 possibilités, Adèle 3 possibilités et Nora en a une seule. Conclure qu'Adèle a raison.

Ou : dresser la liste de tous les couples possibles de nombres obtenus en tenant compte de l'ordre des lancers. Pour cela, écrire une liste, faire des dessins, faire un tableau. Effectuer la somme des points obtenus aux 2 lancers et déterminer le nombre d'apparition de chaque somme. Exemple de tableau possible :

		Points obtenus au second lancer					
		1	2	3	4	5	6
Points obtenus au premier lancer	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (Oui, Adèle a raison, Sarah et Adèle ont 3 possibilités, Maxime 6 et Nora 1 seule) avec liste complète des décompositions de chaque somme
- 3 Réponse correcte et complète sans explications
ou réponse (Sarah et Adèle ont 3 possibilités, Maxime 6 et Nora 1 seule) sans préciser qu'Adèle a raison avec une liste complète des décompositions additives de chaque nombre
- 2 Réponse (Adèle a raison) avec la liste des décompositions additives de chaque nombre, mais sans prendre en compte l'ordre des lancers (Sarah et Adèle ont 2 possibilités, Maxime 3 et Nora 1 seule)
ou absence de réponse mais calcul des possibilités pour au moins deux des enfants
- 1 Début de raisonnement correct (par exemple calcul des possibilités pour un enfant...)
ou seulement la réponse « oui, Adèle a raison »
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

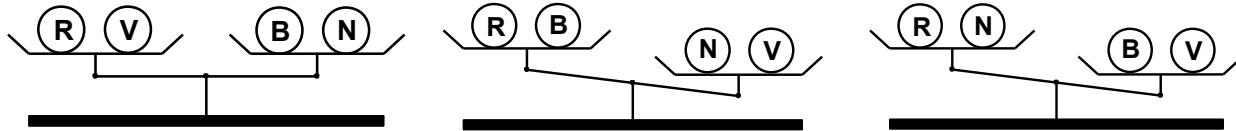
Origine : Lyon

13. LE POIDS DES BILLES - II (Cat. 8, 9, 10)

Un sachet renferme 4 billes de couleurs différentes : une rouge (R), une verte (V), une bleue (B) et une noire (N).

Deux des billes pèsent chacune 3 g, les deux autres billes pèsent respectivement 2 g et 4 g.

Voici trois pesées réalisées avec ces billes :



Ces trois pesées suffisent pour connaître le poids de chaque bille.

Quel est le poids de chacune des billes ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

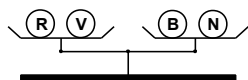
ANALYSE A PRIORI

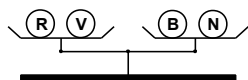
Tâche mathématique

Déterminer les masses respectives de quatre objets à partir des informations données par trois pesées réalisées avec une balance à deux plateaux et de la donnée des quatre masses.


Analyse de la tâche

- Savoir interpréter un équilibre et un déséquilibre d'une balance à deux plateaux :



- De , déduire que la somme des masses de la bille rouge et de la bille verte est égale à la somme des masses de la bille bleue et de la bille noire : $R+V=B+N$ (1) À partir des données numériques, trouver que cette égalité ne peut être réalisée que d'une façon : $3 + 3 = 2 + 4$. En déduire que les billes de même masse sont soit la bille rouge et la bille verte, soit la bille bleue et la bille noire.



- De , déduire que la somme des masses de la bille rouge et de la bille bleue est inférieure à la somme des masses de la billes noire et de la bille verte : $R+B < N+V$ (2)

Envisager les différents cas :


Si $R = V = 3$ et $B = 4$ et $N = 2$, l'inégalité n'est pas vérifiée car on a alors $R + B > N + V$

Si $R = V = 3$ et $B = 2$ et $N = 4$, l'inégalité est vérifiée : $R + B < N + V$

Si $B = N = 3$ et $R = 4$ et $V = 2$, l'inégalité n'est pas vérifiée car on a alors $R + B > N + V$

Si $B = N = 3$ et $R = 2$ et $V = 4$, l'inégalité est vérifiée : $R + B < N + V$



- De , déduire que la somme des masses de la bille rouge et de la bille noire est inférieure à la somme des masses de la billes bleue et de la bille verte : $R + N < B + V$ (3).

Constater que des deux cas qui vérifient l'inégalité (2), seul $B = N = 3$ et $R = 2$ et $V = 4$ satisfait l'inégalité (3).

Donc, les deux billes qui ont la même masse sont la bille bleue et la bille noire, la bille la plus lourde est la verte et la plus légère est la rouge.

Ou, après avoir traduit les pesées en l'égalité (1) et les inégalités (2) et (3), déduire de (1) et (2) que $B < V$ et de (1) et (3) que $N < V$.

- A partir des données numériques, trouver que ces deux inégalités strictes ne peuvent être vérifiées que si $V = 4$. Faire l'inventaire des cas possibles. Il y en a trois :

$B = 2$ et $N = 3$ et $R = 3$

$B = 3$ et $N = 2$ et $R = 3$

$B = N = 3$ et $R = 2$

- pour chacun de ces cas, tester si l'égalité (1) est vérifiée. Seul $B = N = 3$ et $R = 2$ et $V = 4$ convient.

Ou : faire des hypothèses sur la masse de chacune des billes et pour chaque cas, vérifier si l'égalité et les deux inégalités sont vérifiées. Il faut examiner tous les cas possible pour s'assurer de l'unicité de la solution.

Attribution des points :

- 4 Réponse correcte (la bille noire et la bille bleue pèsent 3 g, la verte 4 g, la rouge 2 g) avec explications claires prouvant l'unicité de la solution
- 3 Réponse correcte avec explications incomplètes (par exemple sans preuve de l'unicité de la solution) ou réponse correcte sans explication mais avec vérification des trois pesées
- 2 Réponse correcte sans explication et sans vérification des pesées
- 1 Solution qui ne vérifie que deux des trois pesées ou début de raisonnement correct (par exemple, essais de nombres pour vérifier les contraintes de la situation, écriture de l'égalité et deux inégalités, ...)
- 0 Incompréhension du problème

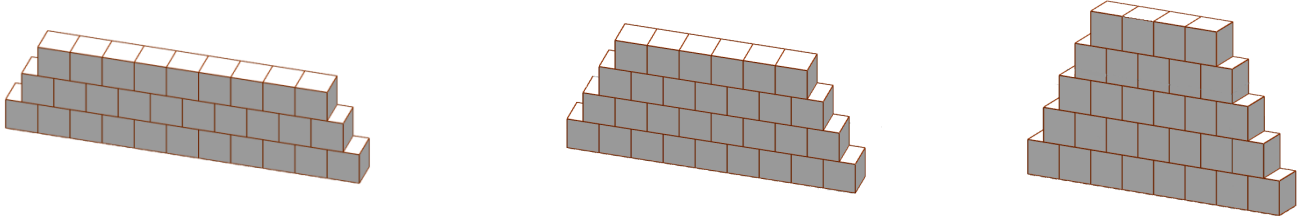
Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Luxembourg (réinterprétation d'un classique)

14. LES CUBES DE ZOÉ - II (Cat. 8, 9, 10)

Zoé dispose de 50 cubes en bois et s'amuse à faire des empilements en respectant cette règle : à chaque étage, il y a exactement un cube de moins qu'à l'étage qui est juste en dessous.

Avec 30 cubes elle a pu faire ces trois empilements différents qui sont dessinés.



Avec ses cubes, Zoé réalise ensuite plus de trois empilements différents ayant chacun le même nombre de cubes, en respectant toujours la même règle.

Quel est le nombre de cubes que Zoé a utilisés pour obtenir plus de trois empilements ?

Décrivez les empilements réalisés en précisant le nombre de cubes à chaque étage.

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer un entier naturel inférieur à 50 ayant 4 décompositions trapézoïdales (décompositions en sommes d'entiers consécutifs).

Analyse de la tâche

- Comprendre la règle de construction des empilements à l'aide du texte et des dessins.
- Comprendre qu'il s'agit de chercher des décompositions additives d'entiers naturels inférieurs ou égaux à 50, réalisées avec des entiers consécutifs.
- Comprendre qu'il faut chercher un entier inférieur ou égal à 50, ayant 4 décompositions trapézoïdales.
- Procéder de façon systématique en cherchant toutes les décompositions trapézoïdales des entiers naturels inférieurs ou égaux à 50 et s'apercevoir que le premier et le seul qui permette d'obtenir plus de 3 décompositions est 45 et donc que 45 convient.

La justification attendue est la production des 5 sommes suivantes :

$$45 = 22 + 23 = 14 + 15 + 16 = 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9.$$

- Procéder par essais additifs plus ou moins organisés et aboutir à 45. On peut par exemple partir de $45 = 22 + 23$ et diminuer la valeur de chacun des termes de façon plus ou moins réfléchie.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (45 cubes) avec les 5 décompositions $45 = 22 + 23 = 14 + 15 + 16 = 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$) et explications prouvant l'unicité de la solution.
- 3 Réponse correcte (45 cubes) mais avec seulement quatre décompositions
- 2 Réponse « 45 cubes » sans aucune décomposition
ou identification d'un nombre autre que 45 ayant 3 décompositions trapézoïdales avec donnée de ces décompositions
- 1 Début de raisonnement correct avec présence de quelques tentatives
ou réponse erronée du fait d'une erreur de calcul
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

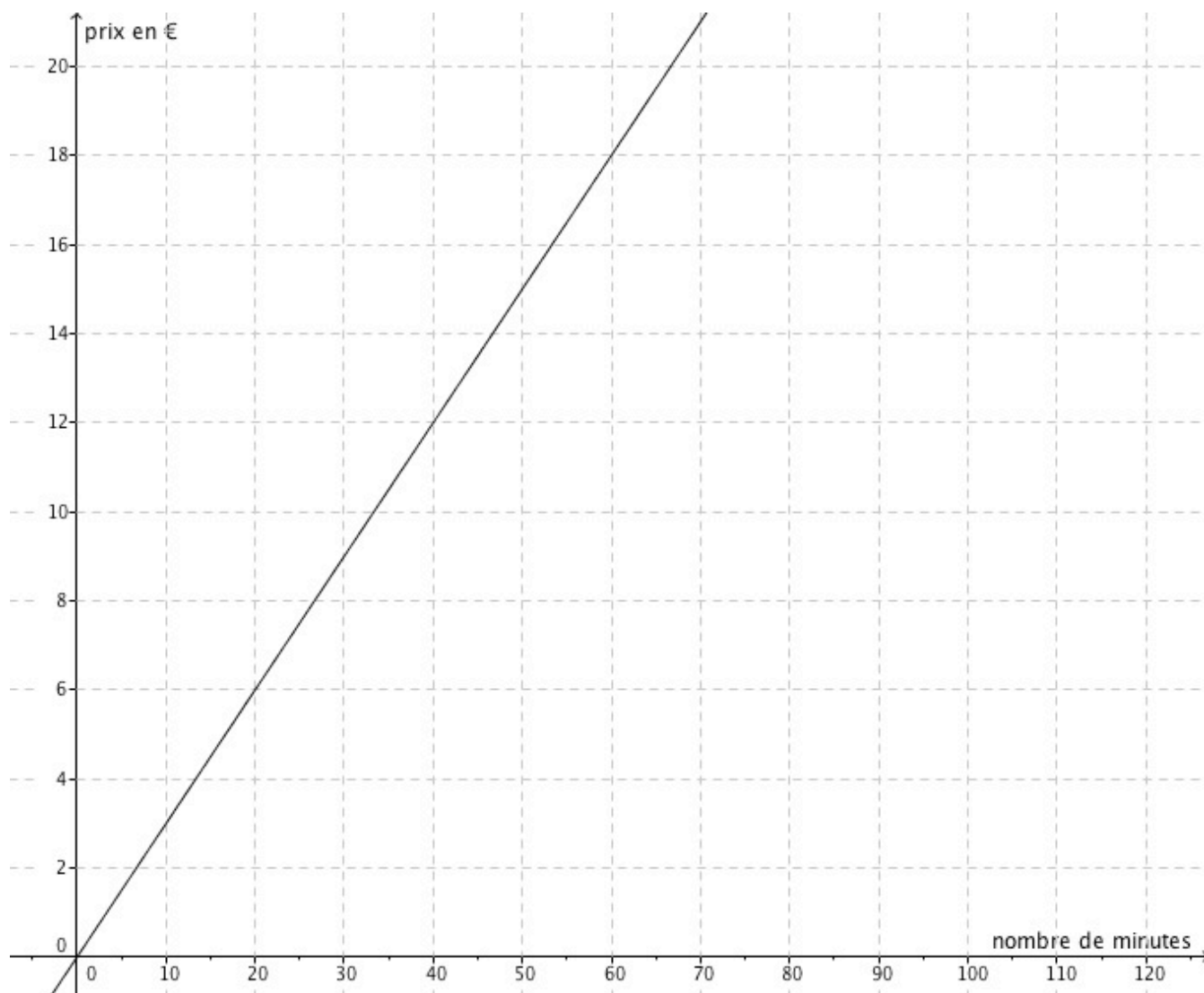
Origine : Bourg en Bresse

15. TÉLÉPHONE MOBILE (Cat. 8, 9, 10)

Un opérateur de téléphonie mobile propose deux offres pour les appels vers l'étranger.

Offre A:

On ne paie pas d'abonnement mensuel et le prix des communications pour un mois est proportionnel au nombre de minutes de communications, comme le montre le graphique ci-dessous :



Offre B:

On paie un abonnement mensuel de 13 € plus 10 centimes à la minute (pour chaque minute de communication).

Pour combien de minutes de communications par mois, le prix à payer est-il le même dans les deux offres ? Quel est ce prix ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

Déterminer la valeur commune de deux fonctions affines, l'une donnée par une représentation graphique et l'autre à l'aide d'indications numériques.

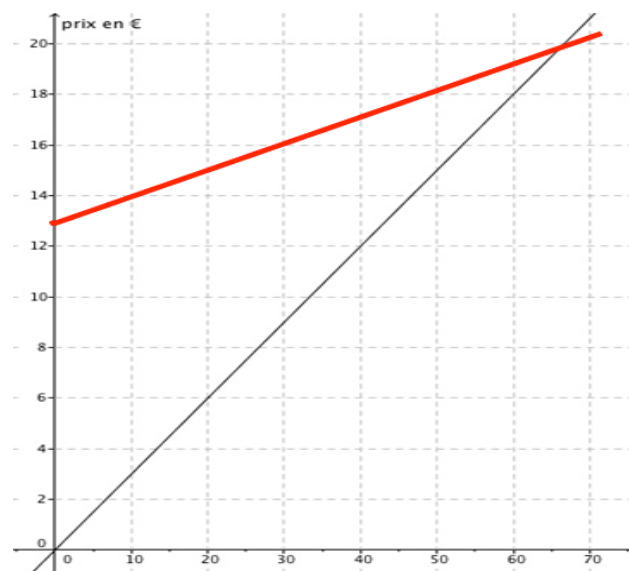
Analyse de la tâche

- Observer le graphique de l'offre A et noter, par exemple, que la droite passe par trois points dont les coordonnées sont des entiers: (20 ; 6), (40 ; 12) et (60 ; 18).

- Comprendre qu'avec l'offre B, il faut payer une somme fixe de 13 € qu'on téléphone ou non, et que par exemple, le prix à payer sera de 14 € pour 10 minutes de communication mensuelle.
- Une première façon de trouver la solution est de procéder par des tentatives systématiques, par exemple au moyen d'un tableau qui présente le prix à payer pour chaque offre pour les mêmes durées. Constaté ensuite que pour 60 minutes l'offre A est plus avantageuse, alors que, pour 70 minutes, c'est l'offre de B qui est la plus avantageuse. Dédire qu'on paie le même prix pour une durée comprise entre 60 et 70 minutes. Rechercher ensuite cette durée : 65 minutes.

Durée (min)	Prix A (€)	Prix B (€)
0	0	13
10	3	14
...
60	18	19
65	19,5	19,5
70	21	20

Ou, graphiquement, par exemple en plaçant des points correspondant à des couples de valeurs de l'offre B, remarquer qu'ils sont alignés et tracer la droite correspondante. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des deux droites (65; 19,5). Puisque le point d'ordonnée 19,5 ne correspond pas à une ligne du quadrillage, il faut effectuer une vérification arithmétique.



Ou : par l'algèbre, par exemple, avec un système de deux équations linéaires du type

(p représente le prix en € et n la durée en minutes)

$p = 0,3n$ pour l'offre A et $p = 13 + 0,1n$ pour l'offre B, ce qui conduit à la solution : $n = 65$ et $p = 19,5$.

ou avec une seule équation : $13 + n/10 = 3n/10$.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (65 min ; 19,5 €) avec explication complète.
- 3 Réponse correcte avec une explication incomplète, mais avec une vérification, ou une réponse erronée due à une mauvaise interprétation des données avec des explications complètes, ou une réponse erronée due à une erreur de calcul, avec des explications complètes.
- 2 Réponse correcte sans aucune explication.
- 1 Début de raisonnement correct (par exemple début de procédure algébrique ou lecture correcte des données du graphique...)
- 0 Incompréhension du problème.

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Luxembourg et Franche-Comté

16. À LA RECHERCHE DU NOMBRE PERDU (Cat. 8, 9, 10)

Alice et Bertrand ont chacun une calculatrice.

Ils commencent par taper le même nombre sur leur calculatrice.

Ensuite, Alice tape la séquence de touches suivante : $\boxed{\times} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{-} \boxed{9} \boxed{=}$.

Bertrand, en même temps, tape cette autre séquence de touches : $\boxed{\times} \boxed{3} \boxed{+} \boxed{4} \boxed{=}$.

Alice et Bertrand constatent alors que leurs deux calculatrices affichent le même résultat.

Ils trouvent cela étrange et veulent vérifier en refaisant les calculs, mais ils ne souviennent pas du nombre qu'ils ont tapé au départ.

Quel est ce nombre ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer un nombre décimal auquel on applique deux programmes de calcul différents qui conduisent au même résultat.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'un même nombre est tapé au départ sur les deux calculatrices et qu'après avoir effectué deux séquences de calculs différentes, l'une sur une calculatrice et l'autre sur l'autre calculatrice, on obtient le même résultat sur les deux calculatrices.
- Procéder par essais : choisir un nombre de départ et effectuer les calculs faits par Alice et Bertrand. Poursuivre avec de nouveaux essais inorganisés ou choisir de nouvelles valeurs à tester en fonction de l'évolution de l'écart constaté entre les deux résultats, jusqu'à trouver le nombre cherché.

Ou engager une résolution algébrique :

Soit en écrivant une équation avec une seule inconnue en désignant par exemple par a le nombre de départ :

$$11a - 9 = 3a + 4, \text{ d'où } a = 1,625.$$

Soit en écrivant un système de deux équations du premier degré à deux inconnues :

$$\begin{cases} 11a - 9 = b \\ 3a + 4 = b \end{cases}$$

dont la résolution conduit à $a = 1,625$ et $b = 8,875$.

Remarque : la résolution du système peut aussi se faire par essais et ajustements.

Attribution des points

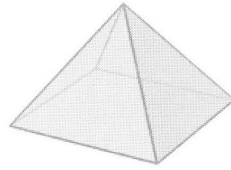
- 4 Réponse correcte (1,625) avec explications complètes et claires.
- 3 Traduction correcte du problème par une équation ou un système d'équations, mais réponse erronée due à erreur de calcul ou réponse exacte avec explications incomplètes ou peu claires.
- 2 Réponse correcte, sans explications, ou recherche inaboutie avec une valeur approchée de la solution comprise entre 1,62 et 1,63.
- 1 Début de raisonnement correct : premiers essais qui montrent la compréhension du problème ou problème mis en équation (une équation ou système d'équations), ou réponse 8,875 qui est le résultat commun des deux séquences de calcul.
- 0 Incompréhension du problème.

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Bourg en Bresse, d'après « Les débuts de l'algèbre au collège », INRP, 1996

17. LA PYRAMIDE DE SOPHIE (Cat. 9, 10)

Sophie est une artiste qui aime travailler avec des formes géométriques. Aujourd'hui, elle a réalisé une pyramide régulière à base carrée. Chacune des arêtes de la pyramide mesure 1 m.



Elle veut placer à l'intérieur de cette pyramide un parallélépipède rectangle à base carrée, positionné ainsi :

- une des deux bases carrées du parallélépipède repose sur la base de la pyramide ;
- les sommets de la seconde base carrée du parallélépipède sont les centres de gravité de chacune des faces latérales de la pyramide.

Pour réaliser le parallélépipède, Sophie doit calculer les longueurs de ses arêtes.

Quelle est la longueur de chacune des arêtes du parallélépipède de Sophie ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique :

Déterminer les longueurs des arêtes d'un parallélépipède rectangle à base carrée positionné à l'intérieur d'une pyramide régulière dont toutes les arêtes ont la même longueur.

Analyse de la tâche :

- Comprendre que les faces latérales de la pyramide sont des triangles équilatéraux.
- Comprendre que la position des sommets du parallélépipède peut être obtenue en coupant la pyramide par un plan contenant la hauteur CO de la pyramide et passant par le milieu H d'un côté de sa base.

Deux stratégies possibles :

- 1 Stratégie s'appuyant sur des propriétés et théorèmes et sur le calcul.

Si M désigne le centre de gravité d'une face triangulaire de la pyramide, et N le pied de la perpendiculaire menée de M à la base de la pyramide, on obtient une arête latérale [MN] du parallélépipède.

Comprendre que ON est égal à la moitié de la diagonale de la base carrée du parallélépipède.

Si CAB est une face latérale de la pyramide, utiliser le fait que son centre de gravité M est situé au tiers de CH à partir de H et donc que :

$$MH = \frac{1}{3}CH = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ (en mètres)}$$

Il est alors possible de déterminer la longueur MN en appliquant le théorème de Thalès ou en utilisant les triangles semblables OCH et NMH :

OH = AB/2 = 0,5 (en mètres) et en utilisant le théorème de Pythagore :

$$OC = \sqrt{CH^2 - OH^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

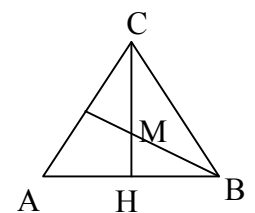
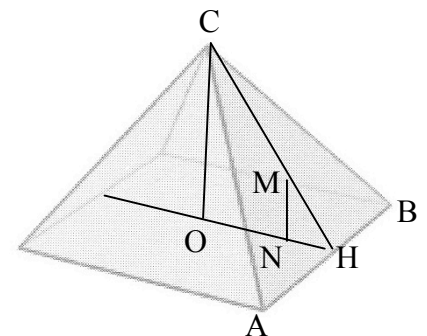
Donc :

$$MN/OC = MH/CH \text{ d'où } MN = OC \times MH/CH = \frac{\sqrt{2}}{6} \text{ (en mètres).}$$

$$NH/OH = MH/CH \text{ donc } NH = OH \times MH/CH = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

D'où ON = OH - NH = 1/2 - 1/6 = 2/6 (en mètres) et donc 2ON = 4/6 = 2/3 (en mètres).

Ainsi, la diagonale du carré de base du parallélépipède mesurant 2/3 (en mètres), sa base mesure $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (en mètres).



Donc, les arêtes du parallélépipède mesurent respectivement $\frac{\sqrt{2}}{3}$ mètres (soit 0,47 mètres en arrondissant au cm)

et $\frac{\sqrt{2}}{6}$ mètres (soit 0,24 mètres en arrondissant au cm).

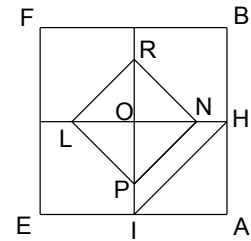
- Autre possibilité pour déterminer la longueur du côté de base du parallélépipède : ABFE est la base de la pyramide et NPRL la base du parallélépipède rectangle.

En utilisant le théorème de Thalès : $ON/OH = NP/HI$ donc

$$NP = ON/OH \times HI = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

- 2 Stratégie reposant sur des propriétés, le dessin et la mesure

- Représenter le triangle ACB par exemple à l'échelle 1/10, tracer deux des trois médianes après avoir précisé ce qu'est le centre du triangle et mesurer MH au mm près.
- Calculer OC, et tracer le triangle rectangle OCH. Reporter à la règle ou au compas la distance MH sur [CH], tracer et mesurer MN.
- Tracer le carré OHAI ou le carré ABFE et de ses médianes, utiliser la règle ou le compas pour placer N sur [OH] et P sur [OI] et mesurer NP.



Attribution des points :

- 4 Bonne réponse ($\frac{\sqrt{2}}{3}$ et $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ou 0,47 et 0,23 ou 0,24 mètres ou 47,1 cm et 23,6 cm) avec des explications claires
- 3 Réponse correcte avec des explications incomplètes ou avec des valeurs approchées obtenues à partir de différentes approximations faites au début des calculs
Ou réponse erronée due uniquement à une erreur de calcul, mais avec les explications appropriées
- 2 Réponse incomplète, mais avec des signes évidents de compréhension du problème (par exemple, prise en compte du centre de gravité du triangle et de la section de la pyramide)
- 1 Début de raisonnement correct qui implique la compréhension du problème (par exemple, le calcul exact de la mesure de la hauteur de la pyramide)
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origine : Parma

18. ROSES ET TULIPES (Cat. 9, 10)

En début de journée, Sylvie la fleuriste a dans son magasin 15 bouquets de roses, avec le même nombre de fleurs dans chaque bouquet et 22 bouquets de tulipes eux aussi avec le même nombre de fleurs dans chaque bouquet. En tout, roses et tulipes ensemble, il y a un peu moins de 400 fleurs.

À la fin de la journée, Sylvie a vendu 11 bouquets de roses et 19 bouquets de tulipes et elle remarque que le nombre de tulipes restantes dépasse de 4 le nombre de roses restantes.

Combien de roses et combien de tulipes Sylvie avait-elle au début de la journée ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique :**

Résoudre une équation linéaire à deux inconnues dont on cherche les solutions entières (équation diophantienne) situées dans un intervalle déterminé.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les fleurs restantes correspondent à 4 bouquets de roses et 3 bouquets de tulipes et que le nombre de tulipes restantes est égal au nombre de roses restantes augmenté de 4.
- Comprendre qu'il est préférable de raisonner sur le nombre de fleurs par bouquet.

Résolution arithmétique : considérer que le nombre de roses restantes est un multiple de 4 et que le nombre de tulipes restantes est un multiple de 3. Le problème revient à chercher un multiple de 3 qui est égal à un multiple de 4, ce qui permet d'obtenir un nombre de fleurs au début de journée voisin de 400 (mais inférieur à 400).

Ecrire les listes des multiples successifs de 4 et 3 :

4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	...				
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	...

Rechercher les nombres communs aux deux listes et retenir les multiples de 4 inférieurs à chacun de ces nombres.

On obtient les couples possibles (8, 12), (20, 24), (32, 36), (44, 48) qui correspondent à des bouquets formés respectivement ainsi (2 roses, 4 tulipes), (5 roses, 8 tulipes), (8 roses, 12 tulipes), puis les nombres initiaux de roses, tulipes et de fleurs qui sont : (30 roses, 88 tulipes, 118 fleurs), (75 roses, 176 tulipes, 251 fleurs), (120 roses, 264 tulipes, 384 fleurs), (165 roses, 352 tulipes, 517 fleurs). Conclure que la réponse est 120 roses et 264 tulipes

Résolution algébrique : si on désigne par x le nombre de roses par bouquet et y le nombre de tulipes par bouquet, le nombre de roses restantes est égal à $4x$, le nombre de tulipes restantes est égal à $3y$ et, comme il reste 4 tulipes de plus que de roses, on a $4x + 4 = 3y$.

- L'équation peut être résolue par essais organisés ou non, par exemple en attribuant successivement à x les valeurs 1, 2, 3, 4 ... et en vérifiant si le premier membre $4x + 4$ est un multiple de 3. On obtient ainsi les valeurs suivantes pour le couple (x, y) : (2, 4) ; (5, 8) ; (8, 12) ; (11, 16) ; (14, 20) ... à partir desquelles, on peut calculer le nombre total de fleurs que Sylvie avait en magasin au début de la journée :

30 roses et 88 tulipes, soit 118 fleurs en tout, ce qui est trop peu ;

75 roses et 176 tulipes, soit 251 fleurs en tout, ce qui est trop peu ;

120 roses et 264 tulipes, soit 384 fleurs en tout, ce qui se rapproche de 400 ;

165 roses et 352 tulipes, soit 517 fleurs en tout, ce qui est trop !

Conclure que Sylvie avait au début de la journée 120 roses et 264 tulipes.

Ou : à partir du système $4x + 4 = 3y$; $15x + 22y < 400$, obtenir que $x < 8,361$ qui conduit à 8 roses par bouquet et 12 tulipes par bouquet.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (120 roses et 264 tulipes) avec explication claire et complète, montrant l'unicité de la solution
- 3 Réponse correcte mais avec des explications peu claires ou avec seulement la vérification des contraintes de l'énoncé ou réponse 384 fleurs avec explication claire et complète, montrant l'unicité de la solution
- 2 Procédure correcte, mais avec une erreur de calcul
ou réponse (75 roses et 176 tulipes) avec explication claire
ou réponse (8 et 12) qui correspond aux nombres de roses et de tulipes par bouquet
- 1 Réponse correcte sans aucune explication
ou début de raisonnement correct
- 0 Incompréhension du problème