

Titre	or.	cat.	Thème mathématique
1. Les ballons colorés (I)	SI	3	proportion (3 est à 24 comme 2 est à x) et somme ($24 + x$)
2. Les feuilles de l'arbre	BB	3-4	comptage à partir de deux dessins incomplets
3. Nombres à deux ou trois chiffres	BE	3-4	arrangements de 3 objets pris 1 à 1, 2 à 2 ou 3 à 3
4. De l'or et des pirates	BE	3-4	décomposition additive de 54 en 8 termes, dont 6 égaux
5. Code secret	LU	3-5	jeu de « Mastermind » sur des nombres de trois chiffres
6. Les ballons colorés (II)	SI	4-5	deux proportions : 3 est à 24 comme 2 est à x , puis 4 est à 24 comme 2 est à y et somme $24 + 24 + x + y$,
7. Jeu de cubes	RZ	4-5	vision d'empilements représentés en perspective
8. Chameaux et dromadaires	5.I	5-6	système de 2 équations dans \mathbb{N}
9. Le bassin	MI	5-6	décomposition additive de 49 en multiples de 3, 4, 5
10. Arbres de Noël à Milan	PR	5-7	événements périodiques selon multiples communs de 12, 14, 18
11. Les pièces de monnaie	FC	5-8	système de 2 équations dans \mathbb{N}
12. Tétracubes	UD	6-8	reconnaissance de tétracubes différents vus en perspective
13. Pièces magnétiques	SI	6-10	système de 3 équations dans \mathbb{N}
14. Partage d'un terrain	FC	6-10	partage d'un rectangle en un rectangle et une partie équivalente
15. Intersection	SR	7-10	intersection de deux droites données chacune par deux points
16. Jardin carré	SI	7-10	nombres dont les carrés ont une différence de 75
17. La boîte de cubes	16.I	8-10	empilement de cubes de 1^3 et de 2^3 dans une boîte
18. Périmètre et aire	LU	9-10	rectangles avec mesures égales de périmètre et d'aire
19. Un nombre attractif	FC	9-10	convergence de la suite récurrente : $u_{n+1} = u_n/2 + 1$

1. LES BALLONS COLORÉS (I) (Cat. 3)

Pour la fête de l'école, les enfants de la classe de Fabienne accrochent sur le mur du préau une rangée de ballons, les uns à côté des autres.

Les 3 premiers ballons sont bleus, les 2 suivants sont rouges, puis les 3 ballons suivants sont bleus, suivis de 2 ballons rouges et ainsi de suite. Les enfants continuent à accrocher les ballons jusqu'au bout du mur. Lorsqu'ils ont terminé, ils ont constaté que les deux derniers ballons sont rouges.

Pour réaliser cette rangée de ballons, les enfants ont utilisé 24 ballons bleus.

Au total, combien de ballons sont accrochés sur le mur du préau ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer le nombre total de ballons d'une file, selon une séquence périodique de 3 ballons bleus et de 2 ballons rouges, dont 24 ballons sont bleus.

Analyse de la tâche

- Imaginer la rangée de ballons où se répète une période de 3 ballons bleus et 2 ballons rouges et/ou en dessiner le début.
- Poursuivre le dessin jusqu'à ce qu'on ait 24 ballons bleus et en terminant la rangée par deux ballons rouges ; puis compter le nombre total de ballons : 40. (Le non respect de la consigne « la rangée se termine avec 2 ballons rouges » entraînerait la réponse erronée 38).

Ou, utiliser un raisonnement arithmétique, par exemple :

- Considérer que 24 ballons bleus correspondent à une répétition de 8 fois les 3 ballons bleus d'une séquence ($8 = 24 : 3$) et calculer le nombre de ballons rouges ($16 = 2 \times 8$).
- Dédire enfin que le total des ballons est $40 = 24 + 16$.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (40 ballons) avec une explication claire et complète (dessin ou calcul)
- 3 Réponse correcte (40 ballons) avec une représentation peu claire ou incomplète ou réponse donnant le nombre de ballons de chaque couleur (24 bleus et 16 rouges) sans calcul du total
- 2 Réponse erronée due à une erreur de calcul ou à un schéma correct mais incomplet, (par exemple 38 ballons qui représentent les séquences organisées avec les 8 groupes de 3 bleus mais sans les 2 derniers rouges) ou réponse donnant le nombre de ballons rouges seulement (16 rouges)
- 1 Début de recherche appropriée, montrant la compréhension de l'alternance des deux sortes de ballons et de la suite numérique, complète ou non, mais sans proposer de réponse
- 0 Incompréhension du problème

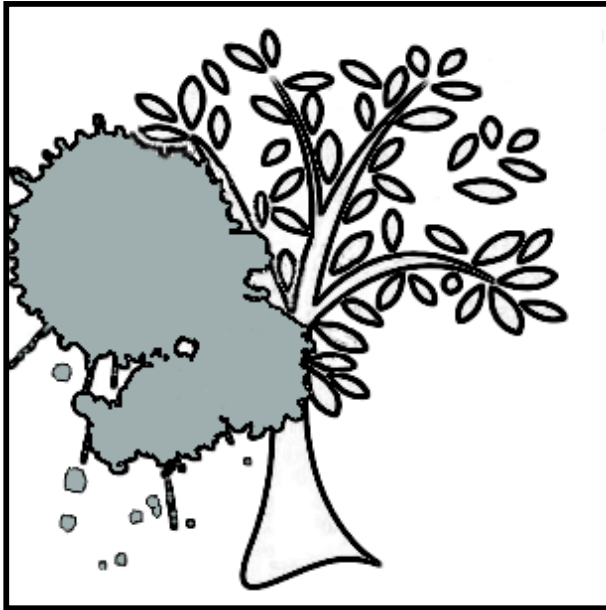
Niveau : 3

Origine : Sienne

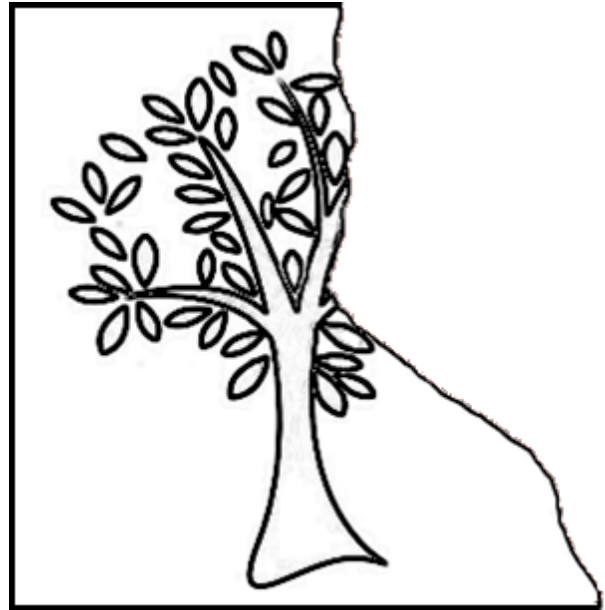
2. LES FEUILLES DE L'ARBRE (Cat. 3,4)

La maitresse a distribué le même dessin à deux élèves. Malheureusement, Philippe a fait une grosse tache sur son dessin et Georges a déchiré sa feuille.

Voici les deux dessins :



Philippe



Georges

Combien de feuilles y avait-il sur le dessin de l'arbre distribué par la maitresse ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Dénombrer une quantité d'objets représentés sur un dessin à partir de deux copies incomplètes de ce dessin, sur lesquelles figurent tous les objets, certains figurant sur les deux.

Analyse de la tâche

- Se rendre compte qu'il s'agit du même objet dont une partie est représentée sur chacun des dessins.
- Constater que toutes les feuilles ne sont pas visibles sur un seul dessin et qu'il faudra passer de l'un à l'autre pour les compter toutes en évitant de compter deux fois celles qui figurent sur les deux.
- Compter une à une les feuilles d'un dessin, puis celles de l'autre qui ne sont pas déjà comptées sur le premier. On peut s'aider de marques, d'une numérotation des feuilles, de couleurs, ... pour ne pas en oublier. La difficulté principale est le contrôle des feuilles déjà présentes sur le premier dessin, qu'on peut éventuellement biffer une à une sur le second.

Ou, observer les dessins et constater que les feuilles peuvent être rangées dans 3 catégories :

- Les feuilles cachées sur le dessin de Philippe mais pas sur celui de Georges (20)
- Les feuilles disparues sur le dessin de Georges mais pas sur celui de Philippe (28)
- Les feuilles visibles sur les deux dessins (20)

Terminer en additionnant les trois nombres ($20 + 20 + 28 = 68$)

Ou reconstituer l'arbre entier soit en complétant un des deux dessins, soit en découpant, soit encore en coupant et collant, après avoir identifié sur l'un des dessins la partie qui est manquante sur l'autre. Compter les feuilles de l'arbre reconstitué.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (68) avec, sur la copie, les feuilles clairement notées une à une pour le comptage (marque, numéro) ou avec l'addition $20 + 20 + 28$ ou par un découpage et collage ou encore par une des phrases du genre « on a compté toutes les feuilles sans compter deux fois celles qui étaient sur les deux dessins » ou « on a compté toutes les feuilles des deux dessins puis on a enlevé une fois celles qui étaient sur les deux ou « on a compté toutes les feuilles de P, puis celles qui sont sous la tache qu'on a comptées sur le dessin de G »...

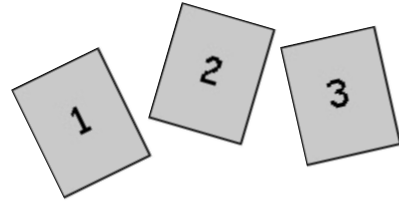
-
- 3 Réponse qui diffère de 1 de la réponse correcte (67, ou 69) avec traces ou explications comme pour 4 points
 - 2 Réponse qui diffère de 2 de la réponse correcte (66 ou 70) avec traces ou explications comme les précédentes ou réponse exacte (68) sans aucune trace ni explication sur la manière dont elle a été trouvée
 - 1 Réponse qui diffère de 3 ou 4 de la réponse correcte (64, 65, 71, 72)
ou adjonction des feuilles visibles sur les deux dessins, mais sans décompter les feuilles communes (88)
 - 0 Incompréhension du problème ou réponse différente de celles qui sont énumérées ci-dessus

Niveaux : 3, 4

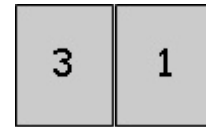
Origine : Bourg en Bresse

3. NOMBRES À DEUX OU TROIS CHIFFRES (Cat. 3, 4)

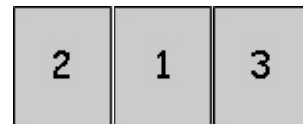
Pascaline a trois cartes portant les chiffres 1, 2 et 3, avec lesquelles elle s'amuse à former des nombres.



Par exemple, elle forme le nombre 31 en plaçant le 3 et le 1 comme ceci :



ou le nombre 213 en disposant les trois cartes comme ceci :



Combien Pascaline peut-elle former de nombres avec une, deux ou toutes ses trois cartes ?

Ecrivez-les tous.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver tous les nombres de un, deux ou trois chiffres formés avec un seul des trois chiffres 1, 2, 3, (arrangements sans répétition de 3 objets pris 1 à 1, 2 à 2 ou 3 à 3).

Analyse de la tâche

- Comprendre que les différentes façons de former un nombre dépendent des chiffres utilisés et de la position qu'ils occupent (centaine, dizaine ou unité).
- Comprendre que chaque chiffre ne peut être utilisé qu'une seule fois dans chaque nombre
- Comprendre qu'en prenant les cartes une à une on peut former les trois nombres 1, 2 et 3.
- Établir une stratégie qui permet d'inventorier systématiquement toutes les dispositions de deux ou trois cartes pour ne pas perdre de solutions. Par exemple :
pour les nombres à 2 chiffres, en choisissant pour commencer le « 1 » pour chiffre des dizaines on trouve les deux possibilités de chiffre des unités : 12 et 13 ;
même chose avec les chiffres 2 et 3 : 21 et 23 ; 31 et 32 ;
pour les nombres à 3 chiffres, en choisissant pour commencer le « 1 » pour chiffre des centaines et en lui associant les nombres à deux chiffres ne comportant pas 1, on trouve 123 et 132 ;
même chose avec les chiffres 2 et 3 : 213 et 231 ; 312 et 321.
- Dénombrer les 15 possibilités.

Ou : procéder par essais d'écriture de nombres de un, deux ou trois chiffres en s'assurant de la non-répétition des nombres et en les organisant à la fin pour trouver des nombres manquants.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte et complète (15 nombres : 1, 2, 3, 12, 21, 13, 31, 23, 32, 123, 132, 213, 231, 312, 321)
- 3 Réponse avec une ou deux erreurs (par exemple 15 nombres avec un oubli et une répétition, ou 17 nombres avec deux répétitions)
- 2 Réponse avec trois ou quatre erreurs (de 11 à 19 nombres) avec oublis ou répétitions de plusieurs nombres ou réponse avec les 12 nombres différents de deux ou trois chiffres (sans avoir pensé aux nombres d'un seul chiffre) ou réponse avec les 27 nombres différents composés avec les trois chiffres : 1, 2, 3, 11, 12, 13, 21, 22, 23, ... , 333 (sans tenir compte qu'il n'y a qu'une carte par chiffre)
- 1 Réponse erronée ou incomplète avec au moins 4 nombres corrects, et pouvant comporter des oublis ou des répétitions,
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : Belgique, problème inspiré du problème 7 du 23^e RMT.I (Les bagues)

4. DE L'OR ET DES PIRATES (Cat. 3, 4)

Une bande de pirates (le capitaine Barbenoire, son second Barberousse et six matelots) se partage 56 pièces d'or :

- les six matelots reçoivent chacun le même nombre de pièces ;
- Barberousse, le second, reçoit deux pièces de plus qu'un matelot ;
- Barbenoire, le capitaine, reçoit quatre pièces de plus que Barberousse.

Combien chacun des pirates reçoit-il de pièces ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Décomposer 56 en une somme de huit termes dont six sont égaux, un septième vaut 2 de plus que les premiers et le huitième 4 de plus que le septième.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a huit personnes qui doivent se répartir 56 pièces d'or de manière inégale.
 - Se rendre compte qu'il s'agit de compléter une addition dont seule la somme est connue (56), dont les huit termes ne sont pas encore déterminés mais dont on connaît des relations entre certains d'entre eux.
 - Procéder par essais, au hasard ou organisés jusqu'à obtenir la répartition 6, 6, 6, 6, 6, 6, 8 et 12 ou $6 \times 6 + 8 + 12 = 56$
- Ou : retirer 6 et 2, les nombres supplémentaires du second et du capitaine, de 56 et pour obtenir 48 et répartir ce nombre en 8 parties égales (6) puis ajouter 2 puis 6 pour obtenir les parts du second et du capitaine (8 et 12).
- Ou : diviser les 56 pièces en 8 parts de 7 et compenser en retirant une pièce de la part de chacun des six matelots (qui en auront 6), en en donnant une au second (qui en aura 8) et les cinq autres au capitaine (qui en aura 12).
- Les différentes stratégies peuvent être illustrées de représentations graphiques, plus ou moins précises, qui correspondent aux opérations arithmétiques.
- Une erreur possible est de répartir les 56 pièces de la même façon entre les 8 pirates, ce qui fait 7 pièces par pirate.
- Une autre erreur est de considérer que le capitaine ne reçoit que 4 pièces de plus que les matelots.
- Une erreur peut également être de ne pas se baser sur la bonne information au moment de la répartition des 48 pièces (diviser par 6 qui est le nombre de matelots, plutôt que de diviser par 8 qui est le nombre de pirates).

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (le capitaine reçoit 12 pièces, son second en reçoit 8 et les six matelots en reçoivent chacun 6) avec des explications claires et complètes (opérations $6 \times 6 + 8 + 12 = 56$ ou $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 8 + 12 = 56$ ou liste complète des essais effectués)
- 3 Réponse correcte avec des explications partielles ou peu claires ou seulement une vérification (par exemple $6 \times 6 + 8 + 12 = 56$ sans expliquer comment ont été trouvés les différents termes) ou « on a essayé et on a trouvé »...
- 2 Réponse correcte sans explication ni justification
ou réponse erronée due à une erreur de calcul, avec procédure correcte
- 1 Début de recherche cohérente
ou réponse erronée due à une compréhension erronée des conditions (par exemple, le capitaine ne recevrait que quatre pièces de plus que chacun de ses six matelots)
ou réponse erronée due à une mauvaise identification des variables (par exemple, division de 48 en 6 parts égales)
ou réponse 7 due à une répartition entre les pirates sans prise en compte des conditions
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : Belgique, inspiré du problème 8 du 23^e RMT.I (Le Ruban)

5. CODE SECRET (Cat. 3, 4, 5)

Oncle Picsou a choisi un code pour son coffre-fort.

Afin d'être sûr de pouvoir retrouver son code, il a noté les informations suivantes dans son calepin :

« *Mon code est un nombre composé de trois chiffres différents.*

Aucun des cinq codes ci-dessous n'est correct, mais les phrases écrites à côté de ces codes sont vraies :

- *134 : un seul chiffre est correct et bien placé*
- *734 : aucun chiffre n'est correct*
- *625 : aucun chiffre n'est correct*
- *952 : un seul chiffre est correct et mal placé*
- *786 : un seul chiffre est correct et mal placé. »*

Quel est le code choisi par oncle Picsou ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver un nombre de trois chiffres à partir de cinq suggestions indiquant les chiffres « corrects » et/ou « bien placés » (Jeu du Mastermind)

Analyse de la tâche

- Comprendre que le code comporte 3 chiffres différents, choisis dans l'ensemble dix chiffres qui doivent être disposés au bon endroit dans le code.
- Parmi les stratégies possibles, la plus simple est d'éliminer les chiffres qui, d'après les 2^e et 3^e informations, ne doivent pas être pris en compte c'est-à-dire éliminer les chiffres 2, 3, 4, 5, 6 et 7 des cinq codes proposés.
- Noter alors qu'il ne reste que le 1 dans le premier code, correct et bien placé, et qu'on a ainsi le chiffre des centaines.
- Noter ensuite qu'il ne reste que le 9 dans le quatrième code, correct mais mal placé qui peut être le chiffre des dizaines ou des unités.
- Noter finalement qu'il ne reste que le 8 dans le cinquième code, qui est correct mais mal placé à la place des dizaines et qui doit être le chiffre des unités puisque celui des centaines est déjà déterminé, le 1.
- Conclure que le 9 doit occuper la place encore libre du chiffre des dizaines et que le code secret est 198.

Ou, procéder en partie par déduction et par essais de nombre de 3 chiffres en les confrontant aux informations données.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (198) avec des explications qui montrent clairement les étapes suivies, comme, par exemple on a pu éliminer certains chiffres et par conséquent déterminer la place de ceux qui restent (en se référant aux informations qui ont pu permettre ces déductions)
- 3 Réponse correcte avec des explications incomplètes (par exemple, mentionner seulement les chiffres à éliminer ou seulement la place des bons chiffres ...) ou imprécises
- 2 Réponse partiellement correcte avec deux chiffres trouvés sur la base de raisonnements corrects
- 1 Début de recherche correcte, par exemple élimination expliquée des chiffres 7, 3, 4 ou 6, 2, 5
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Luxembourg

6. LES BALLONS COLORÉS (II) (Cat. 4, 5)

Pour la fête de l'école, les enfants de la classe de Fabienne ont accroché sur un mur du préau une rangée de ballons, les uns à côté des autres, et une autre rangée sur le mur d'en face.

Sur le premier mur, la rangée de ballons commence avec 3 ballons bleus, puis elle continue avec 2 ballons rouges, puis encore 3 ballons bleus suivis de 2 ballons rouges ... et ainsi de suite. La rangée de ballons se termine avec 2 ballons rouges.

Sur le deuxième mur, la rangée commence par 2 ballons jaunes, puis elle continue avec 4 ballons verts, puis 2 ballons jaunes suivis de 4 ballons verts... et ainsi de suite. La rangée se termine avec 4 ballons verts.

Pour réaliser ces rangées de ballons, les enfants ont utilisé 24 ballons bleus et le même nombre de ballons verts.

Au total, combien de ballons sont accrochés sur les murs du préau ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer le nombre total de ballons de deux files, selon des séquences périodiques : de 3 ballons bleus et de 2 ballons rouges, dont 24 ballons sont bleus pour la première file ; de 2 ballons jaunes et de 4 ballons verts, dont 24 ballons sont verts pour la seconde file.

Analyse de la tâche

- Imaginer les deux rangées de ballons, ou éventuellement en dessiner le début, où se répète, dans la première une période de 3 ballons bleus et 2 ballons rouges, dans la seconde une période de 2 ballons jaunes et de 4 ballons verts, et/ou en dessiner le début.
- Graphiquement, poursuivre les dessins jusqu'à ce qu'on ait 24 ballons de la couleur désignée (bleus pour la première rangée, verts pour la seconde) et en les terminant pas les ballons de l'autre couleur (2 rouges pour la première rangée, 4 verts pour la seconde). Puis compter les nombres de ballons : 40 et 36, pour un total de 76 ballons.

Ou : Utiliser un raisonnement arithmétique, par exemple pour la 1^{ère} rangée de ballons :

considérer que 24 ballons bleus correspondent à une répétition de 8 fois les 3 ballons bleus d'une séquence ($8 = 24 : 3$) et en déduire le nombre de ballons rouges ($16 = 2 \times 8$) ;

pour la 2^e rangée, le même raisonnement conduit à 6 groupes constitués de 4 ballons verts ($6 = 24 : 4$) et donc à 12 ballons jaunes (2×6).

- Déduire enfin que le total des ballons est $76 = (24 + 16) + (24 + 12)$.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (76 ballons) avec une explication claire et complète (dessins ou calculs)
- 3 Réponse correcte (76 ballons) avec une représentation peu claire ou incomplète (par exemple, calcul sur une seule rangée de ballons)
ou réponse par le nombre de ballons de chaque couleur (24 bleus, 16 rouges, 12 jaunes, 24 verts) ou de chaque rangée (40 et 36) sans le calcul du total mais avec une explication claire
- 2 Réponse erronée due à une erreur de calcul ou à un schéma correct mais incomplet
ou réponse donnant seulement le nombre de ballons rouges (16) et jaunes (12)
- 1 Début de recherche approprié (montrant la compréhension de l'alternance des deux sortes de ballons et de la suite numérique)
- 0 Incompréhension du problème

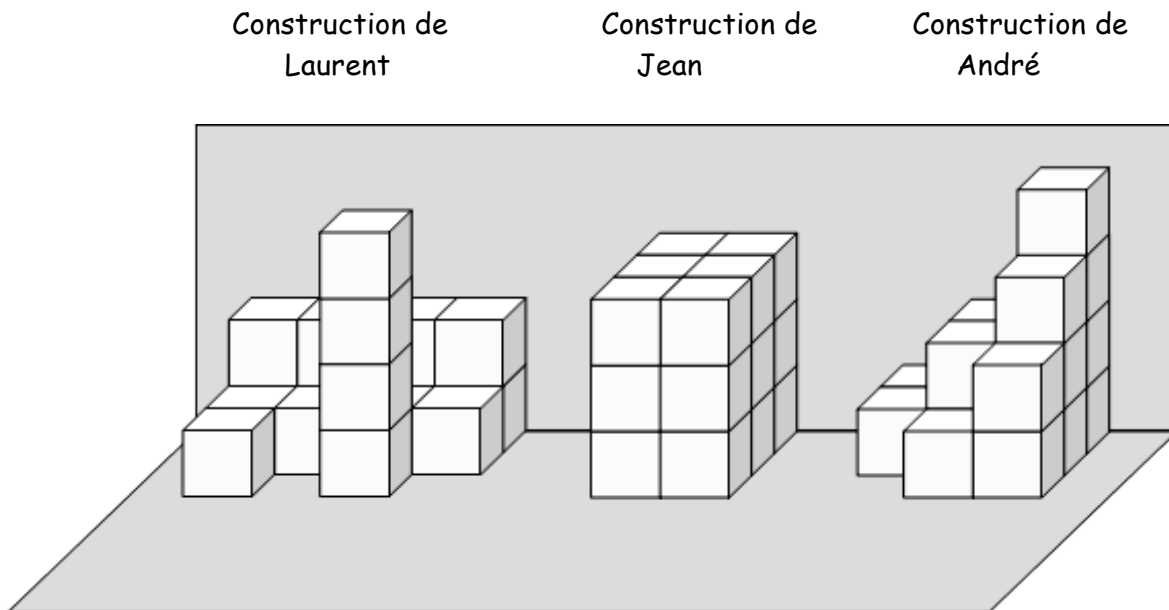
Niveaux : 4, 5

Origine : Sienne

7. JEU DE CUBES (Cat. 4, 5)

Laurent, Jean et André jouent avec des cubes.

Chacun d'eux a fait une construction en empilant des cubes les uns sur les autres contre un mur.



Combien chacun d'eux a-t-il utilisé de cubes pour faire sa construction ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

- Déterminer à partir de représentations en perspective cavalière le nombre de cubes nécessaires à la réalisation de trois assemblages.

Analyse de la tâche

- Observer les représentations et comprendre que sur les cubes visibles une, deux ou trois de leurs faces sont visibles. Comprendre qu'il y a aussi des cubes qui sont cachés et dont il faut tenir compte et que leur existence est révélée par la présence de cubes placés au-dessus.
- Imaginer ou réaliser les constructions avec des cubes à disposition en classe.
- Dénombrer les cubes qui composent chaque construction. Le dénombrement peut se faire par comptage un à un ou en recourant à des calculs (par exemple construction de Laurent $3 \times 4 + 4 + 1 = 17$; celle de Jean $3 \times 2 \times 3 = 18$ celle d'André $3 \times 3 + 2 \times 2 + 1 = 16$) ou calculs similaires.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (Laurent : 17 cubes, Jean : 18 cubes, André : 16 cubes) avec explication de la procédure utilisée (flèches indiquant les cubes cachés, calculs, détails du comptage par rangs ou par piles, ...)
- 3 Réponse correcte sans explications ou explications partielles (pour une seule construction, par exemple) ou une seule erreur de comptage en plus ou en moins, sur une des constructions,
- 2 Réponse avec une erreur de comptage en plus ou en moins sur deux des constructions
- 1 Réponse erronée avec erreur de comptage en plus ou en moins sur les trois constructions ou comptage seulement des cubes visibles (14 cubes pour chacune des trois constructions)
- 0 Incompréhension du problème (par exemple comptage de toutes les faces visibles même celles qui appartiennent à un même cube : Laurent 29, Jean 21, André 24)

Niveaux : 4, 5

Origine : Rozzano

8. CHAMEAUX ET DROMADAIRES (Cat. 5, 6)

Cléopâtre a dessiné des chameaux et des dromadaires, cela fait 23 bosses et 68 pattes.

Elle sait que les chameaux ont deux bosses et les dromadaires n'en ont qu'une.

Puis elle a encore dessiné un homme sur le dos de chaque chameau.

Combien a-t-elle dessiné d'hommes en tout ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

- Déterminer deux nombres naturels soumis à deux relations : leur somme est un quart de 68 et la somme du premier et du double du deuxième est 63, dans un contexte de chameaux et de dromadaires.

Analyse de la tâche¹

- S'approprier la situation en comprenant que pour chaque chameau il faudra compter deux bosses et quatre pattes et pour chaque dromadaire 1 bosse et quatre pattes.
- Traduire les données en relations numériques entre les nombres d'animaux, de chameaux, de dromadaires, en commençant par le nombre d'animaux $4 \times \dots = 68$ ou $68 : 4$ et en tirant qu'il y a 17 animaux.
- Trouver les nombres de chacun des deux types d'animaux, sachant que leur somme est 17 et que la somme des bosses (ou du nombre de dromadaires et du double du nombre de chameaux) est 23.

Pour résoudre ce « système d'équations » on peut procéder par essais au hasard, par essais organisés progressivement, par inventaires de tous les couples dont la somme est 17, soit par déductions du genre : si tous les animaux sont des dromadaires, il y aurait 17 bosses et il en manquerait 6 ; par conséquent il faut remplacer 6 dromadaires par 6 chameaux. Il y aura donc 6 chameaux et 11 dromadaires (vérifiant $6 + 11 = 17$ et $6 \times 2 + 11 = 23$).

- Sans passer par les écritures arithmétiques, le problème peut aussi se résoudre par dessin uniquement. Par exemple des groupes de quatre pattes jusqu'à 68 (17 groupes), une bosse par groupe (17) et 6 bosses supplémentaires réparties sur 6 groupes pour arriver à 23.
- Rédiger la réponse sans oublier que la demande porte sur le nombre d'hommes, 6, correspondant au nombre de chameaux.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte, 6 hommes, avec explications complètes, (dessin explicite, démarche ou essais décrits qui montrent comment on est arrivé à la réponse)
- 3 Réponse correcte, 6 hommes, avec explications ne montrant qu'un ou deux essais, ou seulement une vérification du genre $6 + 11 = 17$ et $(6 \times 2) + 11 = 23$,
ou réponse « 6 chameaux et 11 dromadaires » avec oubli de « 6 hommes », avec explications complètes, démarche ou essais décrits, dessin explicite.
- 2 Réponse correcte, 6 hommes, sans aucune explication
ou réponse « 6 chameaux et 11 dromadaires » avec oubli de « 6 hommes » avec explications partielles
ou une erreur de calcul accompagnée d'explications cohérentes
- 1 Découverte du nombre d'animaux seulement, 17, ou plusieurs essais, mais sans arriver à la bonne réponse
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6

Origine : 5RMT.I.09

¹ Se réfère à l'analyse a posteriori du problème proposé lors du 5^e RMT. (voir Actes Brigue 1997-1998)

9. LE BASSIN (Cat. 5, 6)

Charles désire remplir le bassin de son jardin avec 49 litres d'eau.

Pour transporter l'eau, il dispose de trois seaux, l'un de 3 litres, un autre de 4 litres et le dernier de 5 litres.

Charles veut faire le moins possible de voyages en ne transportant qu'un seul seau à la fois, plein à ras bord. Mais il désire utiliser chacun des seaux au moins une fois.

Combien de voyages, au minimum, Charles devra-t-il faire ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse et indiquez le nombre de seaux de chaque type qu'il pourrait utiliser pour remplir le bassin.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Décomposer 49 en une somme du plus petit nombre de multiples non nuls de 3, 4 et 5.

Analyse de la tâche

- Comprendre que le problème comporte deux contraintes : utiliser les trois seaux et faire le moins de voyages possibles.
- Se rendre compte que pour faire le moins de voyages possibles, Charles doit utiliser le plus possible les seaux les plus grands.
- Procéder par essais organisés. Par exemple :
Si Charles a transporté 9 seaux de 5 litres, il a déversé 45 litres et il manque encore $49 - 45 = 4$ litres. Avec le seau de 4 litres, le bassin sera rempli mais Charles n'aura pas utilisé tous les seaux, ce qui ne convient pas.
Si Charles a transporté 8 seaux de 5 litres (soit 40 litres), il doit encore déverser 9 litres ($49 - 40 = 9$) qui ne peuvent être transportés qu'avec le seau de 3 litres, mais il n'aura pas utilisé tous les seaux, ce qui ne convient pas.
Avec 7 seaux de 5 litres (soit 35 litres), il reste à déverser 14 litres ($49 - 35 = 14$); qui peuvent être transportés en utilisant 2 fois le seau de 4 litres et 2 fois le seau de 3 litres. **Ce qui fait en tout 11 voyages** ($7 \times 5 + 2 \times 4 + 2 \times 3 = 49$).
Avec 6 seaux de 5 litres (soit 30 litres) il reste à déverser encore 19 litres qui peuvent être transportés en utilisant 4 fois le seau de 4 litres et 1 fois le seau de 3 litres. **Ce qui fait en tout 11 voyages** ($6 \times 5 + 4 \times 4 + 1 \times 3 = 49$).
- Continuer encore en utilisant 5 seaux de 5 et 4 de 5 litres et se rendre compte que le nombre de voyages augmente toujours plus.
Conclure que Charles a pu remplir le bassin de deux façons optimales en faisant dans chaque cas 11 voyages.
- Ou procéder par essais non organisés qui peuvent conduire à une solution mais qui permettront difficilement de trouver les deux.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (11 voyages avec les deux possibilités : $7 \times 5 + 2 \times 4 + 2 \times 3$ ou $6 \times 5 + 4 \times 4 + 1 \times 3$) avec explications claires, mettant en évidence que 11 est le nombre minimum de voyages et qu'il n'y a pas d'autres possibilités et/ou avec calculs détaillés
- 3 Réponse correcte (11 voyages avec les deux solutions complètes), mais avec des explications ne montrant pas que 11 est le nombre minimum de voyages et qu'il n'y a pas d'autres possibilités
- 2 Réponse 11 voyages avec une seule des deux possibilités, avec explications ou réponse correcte (11 voyages avec les deux possibilités), mais sans explications
- 1 Réponse 11 voyages et une possibilité sans explications
ou autres solutions non optimales : plus de 11 voyages en utilisant les trois types de seaux
ou moins de 11 voyages mais avec l'utilisation de seulement deux types de seau
ou présence de plusieurs essais qui montrent la compréhension des contraintes (utiliser les trois types de seau et arriver à 49)
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6

Origine : Milano

10. ARBRES DE NOËL A MILAN (CAT. 5, 6, 7)

En décembre dernier, sur la place du Dôme de Milan, trois arbres de Noël étaient illuminés par intermittence, l'un avec des lumières rouges, un autre avec des lumières jaunes et le troisième avec des lumières blanches.

L'arbre avec les lumières rouges était illuminé pendant huit minutes et éteint pendant quatre minutes, puis il s'allumait de nouveau pendant huit minutes et s'éteignait pendant quatre minutes, et ainsi de suite.

L'arbre avec les lumières jaunes était illuminé pendant neuf minutes et éteint pendant cinq minutes, avant de s'allumer et de s'éteindre de nouveau, toujours au même rythme.

L'arbre avec les lumières blanches était illuminé pendant onze minutes et éteint pendant sept minutes, avant de s'allumer et de s'éteindre de nouveau, toujours au même rythme.

Tous les jours, le premier allumage des trois arbres ensemble se faisait à 15h00 exactement.

Combien de fois, après 15h et avant minuit, les trois arbres se rallumaient-ils au même moment ? Et à quelles heures exactement ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer les moments où trois événements périodiques (de périodes 12, 14 et 18 minutes) se produisent simultanément après une première coïncidence, à 15 h 00, jusqu'à minuit.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les trois arbres s'allument et s'éteignent régulièrement à partir de 15 h 00, mais à des rythmes différents.
- Déterminer la période entre deux allumages successifs pour chaque arbre : respectivement 12 minutes, 14 minutes et 18 minutes et en tirer les moments des allumages successifs, après 12, 24, 36, 48, ... minutes depuis 15h pour le premier ; après 14, 28, 42, 56, ... minutes pour le deuxième ; après 18, 36, 54, 72, 90, ... minutes pour le troisième et chercher après quelle durée se produisent les allumages simultanés, de deux arbres ou directement des trois arbres.
- Écrire toutes les illuminations successives de chacun des trois arbres (multiples de 12, de 14, de 18) jusqu'à ce qu'on en découvre une qui soit commune, ou, par voie arithmétique, chercher le plus petit multiple commun de 12, 14 et 18 : 252.
- Transformer les 252 minutes en heures et minutes (quatre heures et 12 minutes) et les additionner successivement à l'heure et du premier allumage pour pouvoir déterminer les deux différents moments d'allumage simultané après 15 h 00: 19 h 12, 23 h 24.

Ou écrire les horaires complets des trois allumages de 15 h à minuit et observer à quels moments ils sont simultanés.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (deux fois, à 19 h 12 et 23 h 24 avec des explications claires de la procédure)
- 3 Réponse correcte avec explications peu claires
ou réponse « 3 fois », qui inclut 15 h 00 avec des explications claires
- 2 Réponse correcte sans explication
ou, les 252 minutes sont trouvées, avec des explications claires mais avec une erreur dans la conversion des unités (minutes en heures)
ou seulement le premier allumage (19 h 12) avec des erreurs pour les suivants
- 1 Début de raisonnement correct : des multiples communs sont trouvés mais sans arriver au plus petit
ou une erreur dans la détermination du plus petit commun multiple
ou réponse « après 252 minutes » sans explications claires
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Parma

11. LES PIÈCES DE MONNAIE (Cat. 5, 6, 7, 8)

Julie possède 20 pièces de monnaie : un mélange de pièces de 1 € et de pièces de 2 €.

Si on remplaçait ses pièces de 1 € par des pièces de 2 € et ses pièces de 2 € par des pièces de 1 €, elle aurait 4 € de plus.

Combien Julie a-t-elle d'euros avec ses 20 pièces ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Résoudre un système « élémentaire » de deux équations du premier degré à deux inconnues avec des nombres entiers dans un contexte d'échange de pièces de monnaie.

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation : il y a deux nombres de pièces, de 1 € et de 2 € (qu'il faudra déterminer), dont la somme est 20 et dont la valeur totale n'est pas connue. Si on intervertit les nombres de pièces de chaque type, la valeur totale vaudra 4 € de plus.
- Passer aux relations arithmétiques correspondantes en respectant les contraintes pour trouver chaque fois la valeur totale (multiplications par 1 ou par 2 et additions), puis addition de 4 pour passer de la première à la deuxième somme et finalement vérifier si ces sommes se retrouvent en échangeant les nombres de pièces.
- Si par exemple on choisit un nombre de pièces de 1 €, (7) il faut calculer le nombre de pièces de 2 € par différence du premier et de 20, ($20 - 7 = 13$) puis calculer la somme dans le premier cas $(7 \times 1) + (13 \times 2) = 33$, puis la somme en intervertissant le nombre de pièces $(13 \times 1) + (7 \times 2) = 27$, puis comparer les deux sommes et vérifier que la seconde vaut 4 de plus que la première ($33 - 27 = 6$, à rejeter).

La solution apparaît avec l'essai de 12 pièces de 1 € et 8 pièces de 2 € $(12 \times 1) + (8 \times 2) = 28$ et $(8 \times 1) + (12 \times 2) = 32 = 28 + 4$.

Il faut encore se rendre compte que d'autres essais sont inutiles et noter la réponse : Julie a $8 \times 2 + 12 \times 1 = 28$ €.

Pour limiter les essais on peut se rendre compte par exemple, au cours des premières tentatives, qu'il doit y avoir plus de pièces de 1 € que de 2 € pour que la somme augmente.

Ou, par un raisonnement qui évite les essais si l'on se rend compte que, chaque fois que l'on remplace une pièce de 1 € par une pièce de 2 € on gagne 1 euro sur la somme totale. On peut alors en déduire que le gain de 4 € sera dû au remplacement de 4 pièces de 1 € par une pièce de 2 €, et qu'il y a 4 pièces de 1 € de plus que de pièces de 2 €. Les 16 autres pièces se répartissent donc en 8 pièces de 1 € et 8 pièces de 2 €, dont l'échange ne modifie pas l'avoir de Julie.

Attribution des points

- 4 Réponse juste (28 euros) avec une description de la démarche suivie (en cas de procédure par essais organisés, la liste des essais doit faire apparaître qu'il n'était pas nécessaire d'en faire d'autres après pour obtenir une autre solution)
- 3 Réponse juste (28 euros) avec description de la démarche peu claire ou liste des essais non organisée ne permettant pas de comprendre que la solution est unique,
ou avec une vérification seulement
ou, réponse (12 pièces de 1 € et 8 pièces de 2€) sans le calcul des 28 euros, avec description de la démarche (v. 4)
- 2 Réponse juste, (28 euros) sans explication
ou réponse (12 pièces de 1 € et 8 pièces de 2€), sans description de la démarche ou avec une vérification seulement
- 1 Réponse fausse, mais avec quelques essais qui n'ont pas abouti à la solution
- 0 Incompréhension du problème

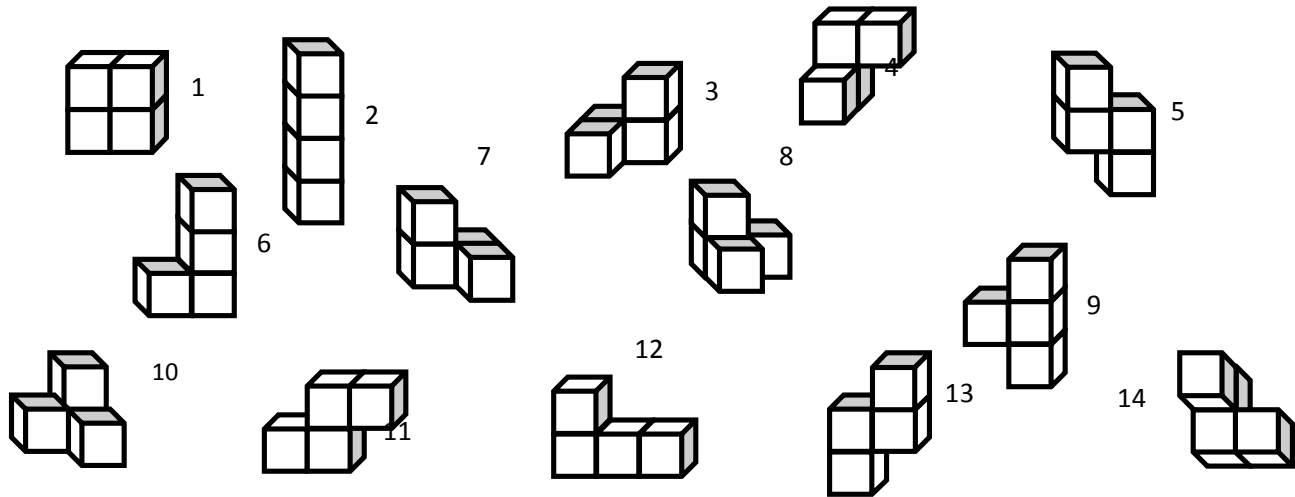
Niveaux : 5, 6, 7, 8

Origine : FC

12. TÉTRACUBES (cat. 6, 7, 8)

Mauro a quatre cubes aimantés qu'il assemble face contre face pour former des tétracubes. Chaque fois qu'il a fait un tétracube, il le dessine puis détache les quatre cubes pour refaire un nouveau tétracube.

Voici ses dessins :



En regardant ses dessins, Mauro se rend compte qu'il a représenté plusieurs fois un même tétracube.

Combien Mauro a-t-il dessiné de tétracubes différents ?

Pour chaque tétracube différent, donnez les numéros des dessins qui le représentent.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Reconnaître, parmi 14 dessins de tétracubes, ceux qui représentent le même tétracube et faire la liste des tétracubes différents.

Analyse de la tâche

- Observer les dessins et se rendre compte que certains représentent le même tétracube mais avec une orientation différente dans l'espace.
- Dresser l'inventaire des différents tétracubes en repérant tout d'abord les plus « faciles » à identifier.
Par exemple, ceux dont les quatre cubes peuvent être disposés dans un même plan :
 - a) l'alignement des 4 cubes, en forme de « I » (2), b) les alignements de 3 cubes en forme de « L » (6 et 12),
 - c) les alignements de 3 cubes en forme de « T » (9) ; d) 2 alignements parallèles de 2 cubes en forme de « S » (5, 11 et 13).
- Parmi les six tétracubes dont les quatre cubes ne peuvent se situer dans un même plan,
 - f) deux alignements orthogonaux de deux cubes (3 et 14)
 - g) deux alignements orthogonaux de deux cubes (4 et 7)
 - h) un seul alignement de deux cubes : un cube « central » et les trois autres sur trois de ses faces (8 et 10)
 Ce sont les catégories f) et g) les plus difficiles à distinguer, leurs tétracubes sont symétriques par rapport à un plan, comme une chaussure droite et une chaussure gauche par exemple.

Attribution des points

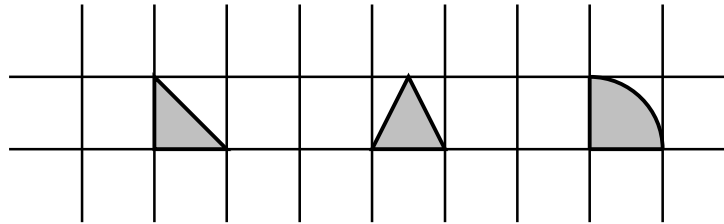
- 4 Réponse correcte (8 tétracubes différents) et liste complète: 1 – 2 – (3/14) – (4/7) – (5/11/13) – (6/12) – (8/10) – 9
- 3 Réponse correcte (8 tétracubes différents) avec un ou deux oublis dans la liste
- 2 Réponse (7 tétracubes différents) sans distinguer « gauche et droite » : (3/4/7/14) placés sous le même tétracube
- 1 Réponse (6 ou 8 tétracubes différents) correspondant à deux erreurs
- 0 Incompréhension du problème ou plus de deux erreurs

Niveaux : 6, 7, 8

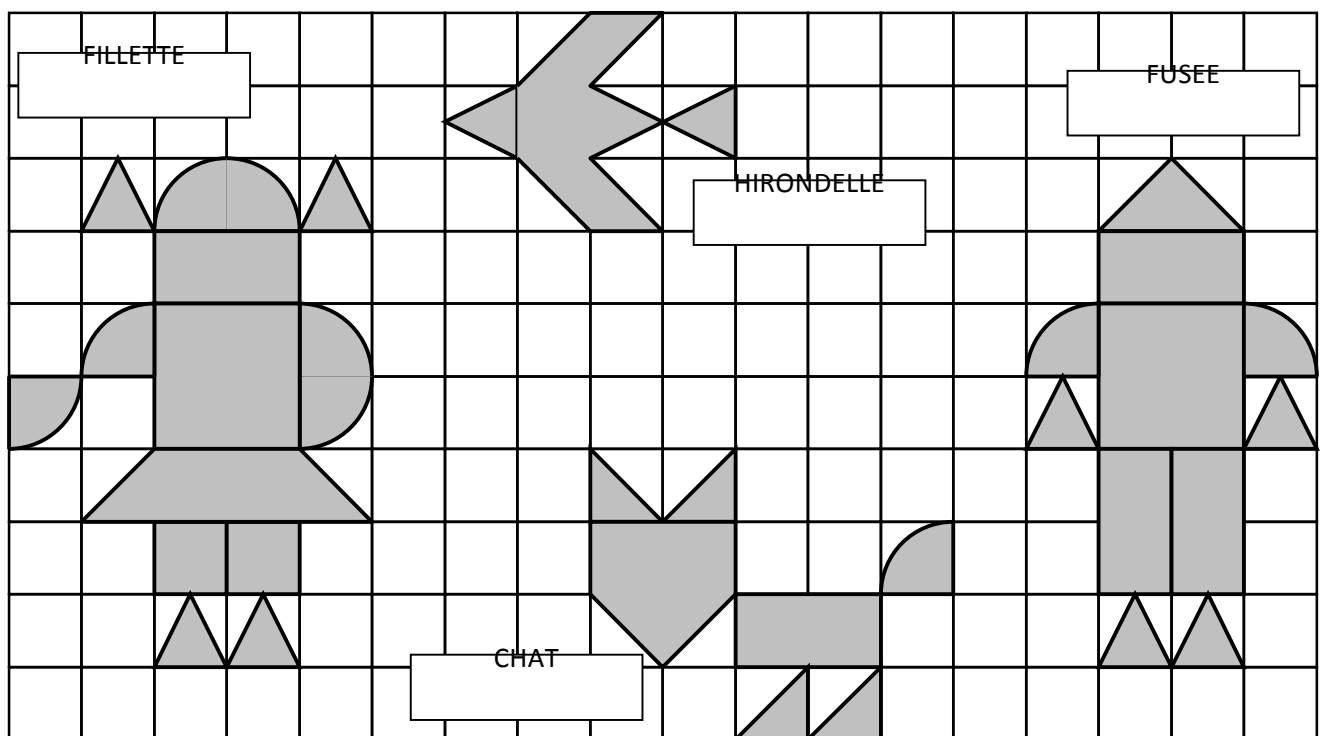
Origine : Udine

13. PIÈCES MAGNÉTIQUES (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

Pour jouer sur un panneau métallique sur lequel est dessiné un quadrillage, ont été utilisées uniquement des pièces magnétiques de ces trois types :



Ces trois types de formes ont été utilisés pour obtenir les figures que vous voyez reproduites ci-dessous : une FILLETTE, une HIRONDELLE, un CHAT et une FUSÉE.



Ont été dépensés :

- 18,20 € pour l'acquisition des pièces magnétiques qui composent la FILLETTE,
- 7,80 € pour les pièces magnétiques qui composent le CHAT,
- 15,00 € pour celles de la FUSÉE.

Combien a-t-on dépensé pour les pièces magnétiques de l'HIRONDELLE ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

À partir de trois compositions différentes obtenues en utilisant un certain nombre de pièces de trois formes différentes et en connaissant le prix en euro de chacune des compositions, déterminer le coût d'une quatrième composition réalisée en utilisant seulement deux des trois types de pièces (ce qui revient à résoudre un système de trois équations linéaires à trois inconnues).

Analyse de la tâche

- Observer les trois pièces en distinguant les deux types de triangles : un triangle rectangle isocèle, moitié d'un carré du quadrillage ; un triangle isocèle avec une base coïncidant avec un côté du quadrillage ; un secteur circulaire correspondant à un quart de cercle avec un rayon égal au côté du quadrillage.
- Comprendre qu'il est nécessaire d'examiner les figures pour déterminer combien de pièces de chaque type sont utilisées. Remarque qu'il est nécessaire d'utiliser deux pièces « triangle rectangle isocèle » pour obtenir les éléments carrés des figures. Reconnaître ainsi, par exemple, que la tête de la fillette est formée avec deux pièces en triangle isocèle (les tresses), deux pièces d' $\frac{1}{4}$ de cercle, et quatre pièces en forme de triangle rectangle isocèle (le rectangle de deux carrés).
- Décrire les images en fonction du nombre et du type de pièces utilisées :
 - FILLETTE : 22 pièces « triangle rectangle isocèle », 6 pièces « quart de disque » et 4 pièces « triangle isocèle »
 - CHAT : 14 pièces « triangle rectangle isocèle », 1 pièce « quart de disque »
 - FUSÉE : 22 pièces « triangle rectangle isocèle », 2 pièces « quart de disque » et 4 pièces « triangle isocèle »
 - HIRONDELLE : 6 pièces « triangle rectangle isocèle » et 3 pièces « triangle isocèle ».
- Se rendre compte que la différence de prix des compositions dépend du nombre et du type de pièces utilisées dans chacune, et que par conséquent il est nécessaire de passer à une comparaison entre les figures. Comprendre que la figure de la fillette diffère de celle de la fusée de 4 pièces « quart de disque » et trouver ensuite que le coût d'une pièce de ce type est de 0,80 € [(18,20 - 15,00) : 4]. De l'information sur la figure du chat, tirer en conséquence que le coût d'une pièce « triangle rectangle isocèle » est de 0,50 € [(7,80 - 0,80) : 14].
- Pour trouver le coût pour l'hirondelle, il faut encore déterminer le prix d'une pièce « triangle isocèle ». Cette dernière valeur peut être déduite des informations sur la fillette, ou celles de la fusée, par la différence entre le coût total et celui des pièces, « triangle rectangle isocèle » et « quart de cercle », dont on a déjà trouvé le coût. Le résultat est qu'une pièce « triangle isocèle » coûte 0,60 € (par exemple, en se basant sur la fillette, le calcul est donné par : [18,20 - (11 + 4,80) : 4] = 0,60).
- Déduire enfin que le coût des pièces pour l'hirondelle est de 4,80 € [6 × 0,50 + 3 × 0,60].

Ou remarquer que le chat n'est constitué que de deux sortes de pièces, 14 pièces « triangle rectangle isocèle » et 1 seul « quart de disque ». Le coût étant de 7,80 €, imaginer que chaque pièce « triangle rectangle isocèle » coûte 0,50 € et que l'autre coûte 0,80 € (lien fort entre 7 et 14). Vérifier ensuite que, à partir de ces données, un même prix est trouvé pour la pièce « triangle isocèle » pour la fillette et la fusée : 0,60 €. Calculer ensuite le coût de l'hirondelle : 4,80 €.

Ou, considérant que le triangle rectangle est la moitié d'un carré ; et que la figure du chat est composé de 7 carrés, émettre l'hypothèse qu'un carré coûte 1 euro et que le quart de disque coûte 0,80 euro. Vérifier l'hypothèse sur la figure de la fillette composée de 11 carrés, 6 quarts de disque et 4 triangles isocèles. De (18,20 - 15,80) : 4 = 0,60 on tire le coût d'un triangle isocèle. Une dernière vérification sur la figure de la fusée confirmera l'hypothèse et permet de calculer le prix de la figure de l'hirondelle.

Ou résoudre le système d'équations :

$$(1) 6q + 22tr + 4ti = 18,20$$

$$(2) 1q + 14 tr = 7,80$$

$$(3) 2q + 22tr + 4ti = 15$$

qui a pour solution $q = 0,80$ €, $tr = 0,50$ € et $ti = 0,60$ €. Calculer ensuite le prix des pièces de l'hirondelle qui est de 4,80 €.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (4,80 €) avec une explication complète (inventaire des pièces de chaque figure, description des étapes, avec calculs successifs des valeurs des différentes pièces)
- 3 Réponse correcte sans explication
ou, procédure correcte mais avec une erreur de calcul soit dans le comptage des pièces, soit dans l'exécution d'une opération avec des nombres décimaux
- 2 Procédure correcte mais avec plus d'une erreur de calcul dans le comptage des pièces et/ou dans l'exécution d'une opération avec des nombres décimaux
ou, le nombre de pièces de chaque type est déterminé correctement pour chacune des figures et la procédure de calcul est bien commencée, mais pas terminée
- 1 Début de raisonnement correct (par exemple, détermination correcte du nombre de pièces de chaque type pour au moins deux des quatre figures)
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8, 9, 10

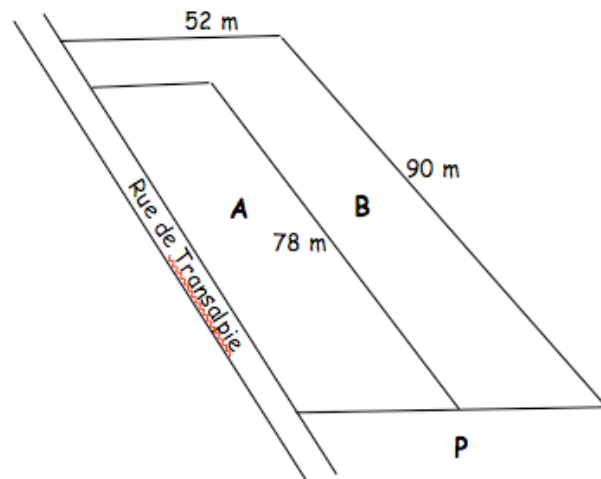
Origine : Siena

14. PARTAGE D'UN TERRAIN (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

Pierre et Marie ont acheté un terrain rectangulaire situé en bordure de la rue de Transalpie et l'ont fait partager en deux parcelles A et B de même aire.

Pour laisser le passage de la parcelle B vers la rue, le géomètre a partagé ainsi le terrain : la parcelle A est rectangulaire (de 78 m de longueur) et la parcelle B a une forme en L.

A quelle distance de la rue le géomètre a-t-il placé le poteau P pour que les deux parcelles aient la même aire ?



Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

A partir d'une représentation en perspective de deux rectangles de longueurs données, déterminer leurs largeurs de façon à se que l'aire du petit soit la moitié de celle du grand.

Analyse de la tâche

- Comprendre que le dessin est un schéma en perspective ne permettant pas d'y faire des mesures et que la réponse devra être obtenue par un calcul, que les grands côtés des parcelles A et B sont parallèles au chemin, les petits côtés des parcelles sont perpendiculaires au chemin ; et que la distance de P au chemin est la largeur de A.
- Constaté que l'aire totale se calcule facilement (rectangle de 90×52), qu'on pourra en déduire les deux parties égales, dont A, qui est un rectangle dont on connaît la longueur et l'aire et dont on pourra calculer la largeur.
- Effectuer les calculs correspondant : aire totale du terrain : $90 \times 52 = 4680$, parties A et B : $4680 / 2 = 2340$ (en m^2)
largeur de la partie A : $2340 / 78 = 30$ (en m)
- En déduire la position du poteau P à 30 m du bord de la rue de Transalpie

Ou bien,

- Décomposer par exemple la parcelle B en un rectangle de 78 m sur 52 m et un autre, pour le passage, de 52 m de 12 m. ($90 - 78 = 12$), dont l'aire est : $52 \times 12 = 624 m^2$. L'aire du rectangle restant est $78 \times 52 = 4056 m^2$
- En déduire que l'aire de A correspond à la moitié de ce dernier rectangle de largeur 26 et à la moitié du passage de largeur ($624 : 2$) : $78 = 4$ m.

Ou, par voie algébrique, exprimer l'aire de la parcelle A en fonction de sa largeur l : $78 l$; celle de B en $624 + 78 \times (52 - l)$ et obtenir l'équation en l : $78 l = 624 + 78 \times (52 - l)$ dont la solution est 30.

Attribution des points

- 4 Le résultat exact (à 30 m du bord de la rue ou 30 m) avec une explication complète et claire (indications des rectangles, avec leurs dimensions, les calculs de l'aire et de la largeur ou résolution algébrique)
- 3 Le résultat exact (à 30 m du bord de la rue ou 30 m) avec des explications peu claires ou incomplètes (ou certaines opérations manquent ; ou seulement une vérification de l'égalité des aires de A et de B sans indiquer comment les dimensions ont été trouvées)
ou réponse « 30 mètres de largeur pour la parcelle A », sans référence à la rue, avec explications détaillées
- 2 Le résultat exact (à 30 m du bord de la rue ou 30 m) sans explication.
- 1 Début de recherche, par exemple avec seulement le calcul de l'aire des deux parties
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8, 9, 10

Origine : F-C

15. INTERSECTION (Cat 7, 8, 9, 10)

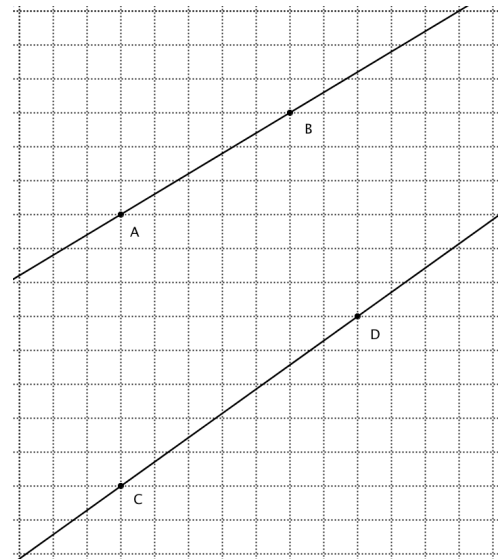
André trace deux droites sur une feuille quadrillée, l'une passant par A et B, l'autre par C et D, (comme vous le voyez sur ce dessin).

Il remarque que si on prolonge ces deux droites, sur une feuille quadrillée beaucoup plus grande, les deux droites vont se couper.

Où se situe ce point d'intersection ?

(Donnez sa position en indiquant de combien de carreaux il faut se déplacer vers la droite et vers le haut depuis C.)

Expliquez comment vous l'avez trouvé.



ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver les coordonnées de l'intersection de deux droites déterminées chacune par deux points ; les quatre points étant donnés sur un quadrillage, l'intersection se situant hors de la feuille.

Analyse de la tâche

- Voir que la droite (AB), à partir de A, « monte » de 3 carrés pour un déplacement horizontal vers la droite de 5 carrés et que la droite CD, à partir de C « monte » de 5 carrés pour un déplacement horizontal de 7 carrés. Voir qu'entre A et C, il y a un « écart » de 8 carrés.

- A partir de ces observations, dessiner les droites sur une feuille quadrillée plus grande ou les prolonger sur d'autres feuilles et constater que cette procédure exige beaucoup de précision pour trouver les coordonnées du point d'intersection, par exemple en marquant progressivement tous les points de la droite (AB) qui sont sur les intersections du quadrillage (de 5 en 5 selon les abscisses) et en vérifiant les points correspondants de la droite (CD) de même abscisse.

Ou, par voie arithmétique, calculer que pour un déplacement de 35 (ppmc de 5 et 7) carrés vers la droite, la droite (AB) « monte » de 21 (7×3) carrés, et la droite (CD) « monte » de 25 (5×5) carrés, donc que les deux droites se sont « rapprochées » de 4 ($25 - 21$) carrés.

- Voir alors qu'il faut donc encore se déplacer de 35 carrés horizontalement vers la droite pour que les droites se rejoignent (car les points A et C sont distants de 8 carrés). Le point d'intersection est donc à 70 carrés à « droite » de C et à 50 carrés plus « haut » que C.

Ou, par voie algébrique, déterminer l'intersection des deux droites dans un système d'axes orthonormés. Par exemple avec le point C comme origine les équations des droites (CD) et (AB) sont : $y = 5/7x$ et $y = 3/5x + 8$ dont la l'intersection est (70 ; 50).

Attribution des points

- 4 Réponse correcte « 70 carrés horizontalement vers la droite et 50 carrés verticalement à partir de C » avec explications claires et précises (dessin, tableau de valeurs comparatives, système d'équations)
- 3 Réponse correcte avec explication insuffisante
ou réponse erronée due à une erreur de calcul (dans la résolution du système d'équations par exemple) mais explications claires
- 2 Réponse correcte sans explication
ou réponse imprécise avec un écart de 1 à 2 carreaux due à une imprécision de la résolution par dessin
- 1 Début de recherche cohérent (ébauche d'un tableau de valeurs, écriture des équations, dessin avec imprécision de 3 à 5 carreaux)
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Suisse Romande

16. JARDIN CARRÉ (Cat. 7, 8, 9, 10)

César possède un terrain carré. Une partie de ce terrain, carrée elle aussi, est réservée au jardin potager. L'aire de la surface qui reste est 75 m^2 .

Quelles sont les mesures possibles des côtés du terrain et des côtés du potager en sachant que ces deux mesures sont des nombres entiers.

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI:**Tâche mathématique**

- Trouver les couples de nombres naturels dont la différence entre leurs carrés est 75, dans un contexte de terrains carrés.

Analyse de la tâche

- Se représenter les deux carrés sachant seulement que le deuxième est « une partie » du premier; c'est-à-dire que l'un est « entièrement » contenu dans l'autre (côtés parallèles ou non). Surmonter cette incertitude sur les positions relatives et comprendre que la recherche demandée ne fait appel qu'aux deux aires encore inconnues des deux carrés aux 75 m^2 de la surface qui reste.

Passer aux relations arithmétiques entre ces trois aires et reformuler le problème en la recherche de deux nombres dont la différence est 75.

- Prendre en compte la formule de l'aire du carré et l'exigence des mesures entières des côtés pour restreindre le problème, dans l'ensemble des nombres naturels à la recherche de deux carrés (nombres) dont la différence est 75.
- On peut procéder par voie arithmétique par essais organisés, par exemple à partir des aires successives du petit carré 1, 4, 9, 16, 25, calculer les aires correspondantes du grand qui vaut 75 de plus et vérifier si ce grand est un carré : (1 ; 76), (4 ; 79), (9 ; 84), (16 ; 91), (25 ; 100) ou $5^2 = 25$; $100 = 10^2$, ne pas s'arrêter là et continuer ... (81 ; 156), (100 ; 75), ($11^2 = 121$; $196 = 14^2$), ... ($37^2 = 1369$; $1444 = 38^2$). On constate qu'il faut s'arrêter là car la différence entre deux carrés successifs de nombres supérieurs à 38 sera supérieure à 75.

Dans cette procédure par essais, la tâche exige une recherche progressive et un contrôle systématique de chaque nouveau couple, avec calculatrice, ainsi qu'une perception de la progression de la différence entre deux carrés successifs (il est probable que la solution 37 et 38 n'apparaisse pas dans cette procédure et que les essais aillent au-delà).

- La procédure algébrique consiste à résoudre l'équation $x^2 - y^2 = 75$, puis à la transformer en $(x - y)(x + y) = 75$ et trouver les trois couples (de diviseurs de 75) dont le produit est 75 : 1×75 ; 3×25 et 5×15 pour en tirer les solutions 37 et 38 ; 11 et 14 ; 5 et 10. (Mais on sait bien que cette procédure n'est à disposition que du professeur ou d'élèves qui maîtrisent les équations, les identités remarquables, les factorisations...)
- Une procédure peut aussi être envisagée à partir de considérations géométriques sur le petit carré (de côté a) et le grand (de côté $a + b$) dont les aires sont respectivement a^2 et $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et dont la différence est représentée par un carré b^2 et deux rectangles ab . Cette différence $2ab + b^2$ peut s'écrire $b(2a + b) = 75$ par factorisation. On en tire les trois valeurs de b (diviseurs de 75) : 1, 3 et 5 donnant les trois valeurs positives de a : 37, 11 et 5 et les 3 valeurs correspondantes de $a + b$: 38, 14 et 10 donnant les mesures des deux carrés : (38 et 37 m; 14 et 11 m, 10 et 5 m).

Attribution des points

- 4 Réponse correcte et complète : (38 et 37 m; 14 et 11 m, 10 et 5 m) avec quelques vérifications où il est noté que ce sont les trois seules solutions
- 3 Réponse correcte et complète sans explications
ou les deux solutions 14 et 11 m, 10 et 5 m avec explications claires
- 2 Deux solutions sont trouvées, avec des explications peu claires
- 1 Début de raisonnement correct, ou une solution seulement
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Siena

17. LA BOÎTE DE CUBES (Cat. 8, 9, 10)

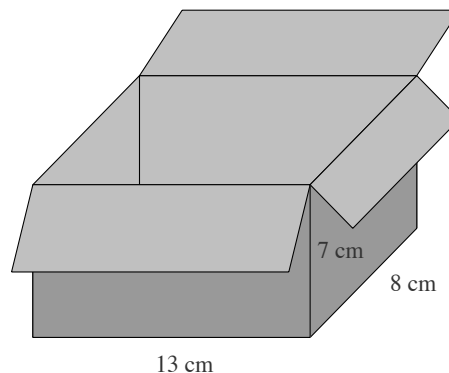
François a une boîte en forme de parallélépipède rectangle de dimensions intérieures 13 cm, 8 cm et 7 cm.

Il dispose de nombreux cubes en bois, les uns de 2 cm d'arête, les autres de 1 cm d'arête.

François veut remplir complètement la boîte avec le moins possible de cubes.

Combien doit-il en mettre de chaque sorte ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.



ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Décomposer un parallélépipède rectangle de dimensions données en un minimum de cubes de 1 et de 2 cm d'arêtes

Analyse de la tâche

- Même si le calcul du volume de la boîte divisé par le volume d'un cube de 2 cm d'arête donne un résultat entier ($728 : 8 = 91$), se rendre compte qu'on ne peut pas remplir complètement la boîte en utilisant uniquement des cubes de 2 cm d'arête.
- Constater qu'on peut mettre au maximum 72 cubes de 2 cm d'arête dans la boîte ($6 \times 3 \times 4 = 72$) ou $(12 \times 8 \times 6) : 8 = 72$.
- Se rendre compte que pour remplir la boîte on doit ajouter des cubes sur la longueur et sur la hauteur.
- Plusieurs méthodes sont envisageables pour trouver le nombre de cubes de 1 cm d'arête :
calculer le volume du parallélépipède (728 cm^3) et celui occupé par les cubes de 2 cm d'arête ($72 \times 8 = 576 \text{ cm}^3$), faire la différence ($728 - 576$) et trouver que 152 cm^3 est le volume occupé par les cubes de 1 cm d'arête ; comprendre que 152 exprime aussi le nombre de cubes de 1 cm d'arête ;
ou bien, compter directement les cubes de 1 cm d'arête : la dernière couche dans la hauteur (7 est un nombre impair) 13×8 et la dernière « paroi » dans la longueur (13 est un nombre impair) 7×8 et en retirant les 8 cubes communs à la couche et la « paroi » $7 \times 8 + 13 \times 8 = 160$; $160 - 8 = 152$.
ou bien, représenter une couche (par exemple formée de $6 \times 4 = 24$ cubes de 2 cm d'arête et de $8 \times 2 = 16$ cubes de 1 cm d'arête) répétée trois fois, puis une dernière couche $13 \times 8 = 104$ cubes, pour un total de $16 \times 8 + 104 = 152$ cubes de 1 cm d'arête.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (72 cubes de 2 cm d'arête; 152 cubes de 1 cm d'arête) avec explications claires
- 3 Réponse correcte avec explications peu claires ;
ou démarche correcte avec explications claires mais avec des erreurs de calcul (la réponse 160 pour le nombre de cubes de 1 cm d'arête est à considérer comme erreur de raisonnement et non comme simple erreur de calcul)
- 2 Réponse correcte pour le nombre d'un seul type de cubes avec explications claires et réponse erronée pour l'autre
- 1 Seulement un des deux nombres sans explications
- 0 Incompréhension du problème ou réponse « 91 et 0 »

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Reprise du problème 16.2.12 (cat. 6, 7)

18. PÉRIMÈTRE ET AIRE (Cat. 9, 10)

Monsieur Poli collectionne les polygones. Il dessine chacun de ses polygones sur une feuille qu'il range dans un de ses nombreux classeurs.

Le classeur « Quadrilatères avec quatre angles droits » commence par la liste des polygones qui y sont classés. Monsieur Poli y a noté le numéro du polygone, les dimensions qu'il a mesurées en cm, le périmètre et l'aire qu'il a calculés.

Voici les premières lignes de sa liste :

Polygone	Longueurs des côtés (cm)	Périmètre (cm)	Aire (cm ²)
1	10,5 et 2	25	21
2	13 et 13	52	169
3	3 et 1,5	9	4,5
4	10 et 2,5 ☺	25	25
5	... et ... ☺		
6	... et ... ☺☺		
7	... et ... ☺☺☺		

Lorsqu'il obtient le même nombre dans les deux dernières colonnes d'une même ligne, il est content et le note :

- par un ☺, si un des deux nombres de la colonne « longueurs des côtés » est un nombre entier et l'autre n'est pas un nombre entier (le polygone numéro 4 par exemple) ;
- par deux ☺☺ si les deux nombres de la colonne « longueurs des côtés », sont des nombres entiers différents ;
- par trois ☺☺☺ si les deux nombres de la colonne « longueurs des côtés », sont égaux.

Complétez les trois lignes des polygones 5, 6 et 7.

(pour le polygone 5, il y a beaucoup de solutions, il suffit d'en mettre une, différente du polygone 4)

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Découvrir les rectangles dont les mesures du périmètre en cm et les mesures de l'aire en cm², sont égales

Analyse de la tâche

- Comprendre que le tableau se rapporte à des rectangles, vérifier les calculs pour les quatre premières lignes, voir qu'il y a un carré à la deuxième ligne ... et se rappeler les formules du périmètre et de l'aire du rectangle : $p = 2(a + b)$ et $A = ab$.

- Procéder par essais par voie arithmétique avec des rectangles dont on fixe une dimension et on fait varier l'autre : par exemple, si on choisit 10 (cm) pour une dimension, quelques essais conduisent à la solution (correspondant au polygone 4 du tableau)

dimensions, en cm :	10 et 1	10 et 2	10 et 3	10 et 2,5
aire, en cm ²	10	20	30	25
périmètre en cm	22	24	26	25

- Procéder par équations avec des rectangles dont on fixe une dimension et on fait varier l'autre : par exemple, si on choisit 7, pour trouver le rectangle dont un des côtés mesure $a = 7$ cm et l'autre est à déterminer, on écrit l'équation $p = 14 + 2b$ et $A = 7b$ dont on déduit $5b = 14$, d'où $b = 14/5 = 2,8$.
- D'une façon plus générale, par voie algébrique, écrire les conditions $p = 2(a + b)$, $A = ab$ et $p = A$, ce qui donne l'équation $ab = 2(a + b)$ ou $b = 2a/(a - 2)$ dont les solutions sont, pour les valeurs entières de a :

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	-1	-	6	4	10/3	3	2,8	8/3	18/7	2,5		

L'inventaire ci-dessus donne les dimensions possibles :

pour le polygone 5 : (5 ; 10/3), (7 ; 2,8), (8 ; 8/3), (9 ; 18/7), ...

pour le polygone 6 : (3 ; 6) ou (6 ; 3)

pour le polygone 7 : (4 ; 4) qu'on aurait aussi pu trouver en résolvant directement l'équation $a^2 = 4a$, tirée de $ab = 2(a + b)$ en posant $a = b$

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (un couple correct en ligne 5 ; (3 et 6) en ligne 6 et (4 et 4 en ligne 7 avec des explications claires et complètes : tableau de valeurs, équations ou liste des essais, ou vérifications pour chaque ligne
- 3 Réponse correcte (les trois lignes) sans explications ou explications pour une ou deux lignes seulement ou réponse correcte pour la ligne 5 et une des deux autres, avec explications claires
- 2 Réponse correcte pour la ligne 5 et une des deux autres, sans explication ou réponse correcte pour les deux lignes 6 et 7 avec explications claires ou réponse correcte pour la ligne 5, avec explications
- 1 Début de recherche cohérente (une seule ligne)
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origine : Sur une idée de LU, revu par dm et fj

19. UN NOMBRE ATTRACTIF (Cat. 9, 10)

Le professeur dit à ses élèves :

« Chacun de vous va écrire une suite de nombres selon les règles suivantes :

- Le premier terme est un nombre que vous choisissez vous-mêmes.
- Pour trouver le deuxième terme de la suite, divisez le premier par 2 et ajoutez 1.
- Pour trouver le troisième terme, divisez le deuxième par 2 et ajoutez 1.
- Continuez ainsi : pour trouver un nouveau terme, divisez le précédent par 2 et ajoutez 1.

Que remarquez-vous ? »

Anne a choisi 50 comme premier terme. Voici le début de sa suite : 50 ; 26 ; 14 ; 8 ; 5 ; 3,5 ; ...

Bernard a choisi son premier terme entre 3 et 10.

Corinne a choisi, comme premier terme, un nombre non entier, entre 0 et 1.

Daniel a choisi un nombre négatif comme premier terme.

A un certain moment, Anne dit :

« La différence entre deux termes qui se suivent dans ma suite est de plus en plus petite, il me semble que mes termes s'approchent d'un nombre et que, en continuant ma suite, je pourrais arriver aussi près de ce nombre que je le veux. »

Bernard, Corinne et Daniel disent :

« Chez nous aussi, les termes de notre suite se rapprochent aussi d'un nombre ».

Quel est le nombre dont s'approchent les termes de la suite d'Anne ?

Et ceux dont s'approchent les termes des suites de Bernard, Corinne et Daniel ?

Expliquez pourquoi les termes des quatre suites semblent s'approcher d'un nombre d'aussi près que l'on veut.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Constater et expliquer la convergence vers 2 de la suite définie par récurrence : $u_{n+1} = u_n/2 + 1$

Analyse de la tâche

- Vérifier le début de la suite d'Anne, la continuer pour constater qu'elle s'approche de 2
50 ; 26 ; 14 ; 8 ; 5 ; 3,5 ; 2,75 ; 2,375 ; 2,1875 ; 2,09375 ; 2,046... ; 2,023... ; 2,011... ; 2,005... ; ... ; 2,000...
- Construire les suites de Bernard, par exemple à partir de 6 :
6 ; 4 ; 3 ; 2,5 ; 2,25 ; 2,125 ; 2,062... ; 2,031... ; 2,015... ; 2,007... ; ... ; 2,000...
de Corinne par exemple à partir de 0,5 :
0,5 ; 1,25 ; ... ; 1,625 ; 1,812... ; 1,906... ; 1,953... ; 1,976... ; 1,988... ; 1,994... ; 1,997... ; 1,998... ; 1,999... ; ...
- de Daniel par exemple à partir de -18 :
-18 ; -8 ; -3 ; -0,5 ; 0,75 ; 1,375 ; 1,687... ; 1,843... ; 1,921... ; 1,960... ; 1,980... ;
- Comparer les résultats et conclure que le nombre visé est 2 pour chacune des quatre suites car les écarts entre les résultats successifs et 2 sont à chaque fois divisés par 2.
- On peut se convaincre de cette « convergence vers 2 » en construisant de nouvelles suites.
- Une explication possible est de choisir un nombre de départ ou de le désigner par une lettre, par exemple d, puis de calculer les termes successifs de la suite :
 $d ; d/2 + 1 ; d/4 + 1/2 + 1 ; d/8 + 1/4 + 1/2 + 1 ; d/16 + 1/8 + 1/4 + 1/2 + 1 ; d/32 + 1/16 + 1/8 + 1/4 + 1/2 + 1 ;$

et, par exemple, constater que le premier élément de chaque terme est d divisé successivement par les puissances de 2 ($d/2^n$, n parcourant l'ensemble des nombres naturels) et que, par conséquent, dès le 10^e terme il deviendra proche du millième $d/1024$; $d/2048$; ... c'est-à-dire négligeable. Les parties des termes à prendre en compte se limiteront à $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots + 1/1024 + 1/2048 + \dots$, somme qui s'approche de 2.

Attribution des points

- 4 Réponse complète (les quatre suites s'approchent de 2) avec le détail des suites dont les termes successifs diffèrent de moins d'un centième, (jusqu'à 2,00... ou 1,99...) et une explication pour le cas général s'appuyant sur l'observation que la différence entre les résultats successifs et 2 est à chaque fois divisée par 2 ou apparition de la suite $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots$
- 3 Réponse complète (les quatre suites s'approchent de 2) avec le détail des suites dont les termes successifs ne diffèrent que d'un dixième près (jusqu'à 2,0... ou 1,9...) avec une explication peu claire pour le cas général
- 2 Réponse complète (les quatre suites s'approchent de 2) avec seulement deux ou trois suites de calculs itérés ou réponse (trois des suites d'approchent de 2) avec une erreur de calcul sur l'autre ou sans l'avoir vérifié, avec détails précis
- 1 Deux ou trois suites construites, mais sans conclusion
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origine : Franche-Comté