

Les mercredis de l'APMEP
année 2025 — 2026



Le hasard à l'école primaire : quels enjeux ?

Richard Cabassut
richard.cabassut@gmail.com

Les mercredi de l'APMEP : 28 janvier 2026



Plan

- Trois approches pour l'école primaire
- Quelques éléments de réflexion à propos du programme (raisonnement, répétition d'expérience, indépendance, formation des maîtres ...)
- Conclusion
- Discussion

Trois approches pour l'école primaire

- L'approche subjective : partir des représentations initiales des élèves
- L'approche par un modèle a-priori de l'expérience aléatoire
- L'approche par les fréquences : un modèle a-posteriori de l'expérience aléatoire

(Martin & al.2019 ; Batanero & al ; 2018 ; Sill & al 2019)

L'APPROCHE SUBJECTIVE

- « L'approche subjective[...] amène un individu à évaluer la force d'une croyance à travers une analyse intuitive de l'information dont il dispose » (Martin & al, 2019, p.74). Cette approche part des représentations spontanées des élèves sur le hasard et met en débat au sein de la classe la validité de ces représentations.
- **Point de vigilance** : le professeur facilite l'expression des représentations spontanées sans les suggérer ; le professeur met en valeur les arguments exprimés et garde en mémoire ceux qui sont à partager.

Représentation du hasard

- Chez les élèves (Roser et Schwartz 2004)
- Dans l'histoire (Guillemette in (Martin & &l. 2019, p.19)

Piaget & al. 1974) rappelle que, de 2 à 7 ans, « il n'y a dès lors ni hasard, ni probabilité, faute d'un système de référence consistant en opérations déductives » et que, de 7 ans à 12 ans, « la découverte de la nécessité déductive ou opératoire permet au sujet de concevoir, par antithèse, le caractère non déductible des transformations fortuites isolées et de différencier ainsi le nécessaire du simplement possible ».

« Entre 3 et 4 ans, les enfants commencent à différencier les situations déterministes des situations aléatoires. Ils font preuve d'une compréhension intuitive de l'incertitude liée aux phénomènes aléatoires et de l'imprévisibilité de leurs résultats, et commencent à exprimer leurs intuitions probabilistes verbalement vers l'âge de 4-5 ans. Vers 5 ans, les enfants développent des explications sur l'impossibilité de prédire les résultats aléatoires. Vers l'âge de 7 ans, les enfants imaginent la distribution d'un ensemble aléatoire de résultats et prédisent qualitativement la probabilité d'un événement [...]. Les enfants de 7 à 8 ans peuvent raisonner sur l'incertitude [...]. De plus, avec un enseignement approprié, les enfants de 9 à 10 ans acquièrent une compréhension du lien entre la randomisation, l'imprévisibilité et l'indépendance des résultats successifs dans une séquence aléatoire » (Batanero & al. 2024)

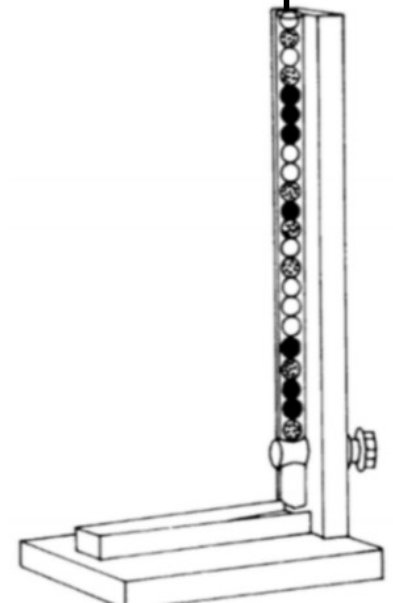
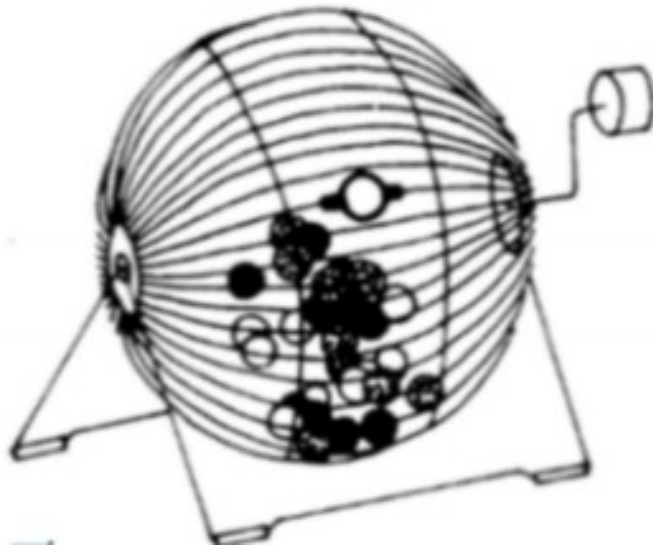
Hasard et déterminisme :

« C'est une chose où on ne peut pas savoir la réponse, quelque chose que tu ne peux pas prédire. »

« Le hasard n'existe pas. » (Roser & al 2004).

« Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent [...] embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome » Laplace (1749–1827)

(Kuzmak
& Gelman
1986)



Hasard et ignorance :

« C'est quand tu réponds et tu ne sais pas la réponse. »
(Roser & al. 2004)

« La probabilité est relative en partie à notre ignorance, en partie à nos connaissances. » Laplace (1749–1827)



(Brousseau & al. 2001⁸)

Hasard et complexité :

« Le hasard c'est un peu de tout. » (Roser & al. 2004)

La tartine beurrée



<https://www.dailymotion.com/video/xvjxar>
(Matthews 1985)



« Le hasard n'est pas l'absence de lois, mais l'impossibilité où nous sommes de saisir l'enchevêtrement de causes multiples dont résulte un événement. » (Cournot 1801-1877)

Le jeu de Go

- Complexité du jeu
- Jouer contre un ordinateur
(Fenech & al. 2024)

Le hasard mystérieux

« Le hasard est une chose où on peut avoir de la chance et de la malchance. »

« Des évènements mystérieux de notre vie. » (Roser & al. 2004)

« Il existe des circonstances où parler de chance ou de malchance a un sens réel, parce que la raison humaine ne peut ni prévoir ni reconstituer le jeu des causes. » (Borel 1914)

Les porte-bonheur (Savard 2019)

Dans une classe 4 (9-10 ans) du Québec : le professeur demande aux élèves de tester en équipe l'effet de leur porte-bonheur en réalisant un tirage (une loterie ou une tombola) mais en déterminant eux-mêmes la façon de procéder. Chaque équipe a au moins un élève sans porte-bonheur.

Le but de l'expérience est de développer chez les élèves une pensée critique vis à vis du hasard.

Equipe 1 : (5 élèves) Ils ont mis le nom des élèves (4) qui avaient apporté un porte-bonheur dans un chapeau et ont tiré un nom gagnant. Ils ont effectué des tirages jusqu'à ce qu'un élève obtienne 3 fois son nom tiré (match). Un élève n'avait pas son nom dans le chapeau, puisqu'il n'avait pas apporté son porte-bonheur.

L'équipe conclut que parce qu'ils ont tous gagné, leurs porte-bonheur ont fonctionné.

Critique des élèves des autres équipes : il n'est pas possible de voir si quelqu'un qui n'a pas de porte-bonheur pourrait gagner. De plus, le fait d'avoir un participant supplémentaire dans les autres équipes enlevait une possibilité d'avoir son nom tiré. Une élève a ajouté que plus il y a de participants au tirage, moins il y a de chance que son nom soit tiré.

Equipe 2 : (5 élèves) Ils ont mis le nom de tous les élèves de l'équipe dans un tube (même sans porte-bonheur pour un total de 5 élèves) et ont tiré jusqu'à ce que quelqu'un obtienne 3 fois son nom tiré. Ensuite, ils ont tiré 4 fois et ils ont eu un grand gagnant (Championnat).

Lors de la présentation de la deuxième équipe, les élèves de cette équipe ont précisé que les porte-bonheur peuvent aider à gagner lorsqu'on les utilise quand on joue au soccer ou au hockey. Le professeur pose la question : est-ce que ça fonctionne aussi dans les tirages ? Les élèves ont dit qu'un porte-bonheur pouvait aider à performer lors de situations requérant de l'habileté. Toutefois, lors de situations faisant intervenir le hasard seulement, comme un tirage, aucune habileté n'était sollicitée. Le résultat dépendait du hasard seulement, pas de l'effet d'un porte-bonheur. Cette discussion a été importante car, par la suite, les autres élèves ont adhéré à ce point de vue et ont communiqué leurs résultats en utilisant ce nouveau critère.

Equipe 3 : (4 élèves) Ils ont mis le nom de tous les élèves de l'équipe dans un pot (4 élèves) et ont tiré chacun leur tour. Ils attribuaient 1 point à la personne lorsque son nom sortait. Une élève a vu son nom sortir plusieurs fois par rapport aux autres. Ils ont répété l'expérimentation sans les porte-bonheurs : il a encore gagné. Lors de leur présentation, les élèves de la cinquième équipe ont expliqué que la personne qui gagnait plus souvent que les autres, qu'elle utilise ou non son porte-bonheur, avait un billet plus gros que les autres. Plutôt que l'effet porte-bonheur, c'est l'effet taille des billets qui est évoqué, avec implicitement l'équiprobabilité qui n'est pas réalisée.

Bilan : Ce dispositif « a permis aux élèves de préciser le vocabulaire associé aux approches probabilistes, soit les mots possible, impossible et certain. L'évaluation des façons de procéder a également permis aux élèves de manifester une conception déterministe (l'illusion de contrôle : un porte-bonheur peut m'attirer de la chance dans le cadre d'un tirage) et de la complexifier en montrant ses limites, soit son inefficacité lorsque l'habileté n'est pas requise par la situation et que l'aléatoire intervient. Les élèves ont admis que le fait d'avoir un porte-bonheur dans le cadre d'un tirage aidait à croire en soi, mais ne pouvait pas influencer le résultat du tirage, car aider à croire en soi était utile seulement lorsqu'ils faisaient quelque chose comme faire du sport. En ce sens, les élèves ont mis en doute leurs croyances et leurs présupposés, puisque le contenu même de la situation faisait intervenir certaines de leurs croyances et émotions. »

Comprendre et utiliser le vocabulaire approprié

(Sill & al. 2019)

Im Herbst liegen viele Laubblätter auf der Erde. Welche Farben können sie haben?



sicher
möglich
unmöglich

- ☐ möglich possible
- ☐ unmöglich impossible



Was wählt der Hund eher? Was ist wahrscheinlicher?
(Knochen, Gurke) Qu'est-ce qui est plus probable ?



certain , possible, impossible

- ① Finde passende Sätze mit **sicher** , **möglich** , **unmöglich** .
- a) Es ist _____ , dass Natalia schneller läuft.
 - b) Es ist _____ , dass Dilara schwitzt.
 - c) Es ist _____ , dass Timo ein Tor schießt.
 - d) Es ist _____ , dass Matteo hinfällt.
 - e) Es ist _____ , dass Emira ein Tor schießt.



Wenn es regnet und die Sonne scheint, sehe ich einen Regenbogen.

Das ist _____, weil _____

sicher 😊	Bei Gewitter gibt es Blitz und Donner.
	☐ Stimmt! ☐ Stimmt nicht!
unmöglich	Warum? _____



(Sill & al. 2019)

« Les enfants utilisent le langage du hasard dans le cadre de l'enseignement formel et dans leur **vie quotidienne**, notamment lorsqu'ils jouent à des jeux de hasard. [...] la plupart ont une **compréhension quantitative de l'équiprobabilité** ; l'impossibilité et la certitude, cependant, sont difficiles à appréhender pour eux [...] En exprimant leur probabilité avant et après des expériences et des simulations, les enfants raisonnent sur les probabilités d'un point de vue subjectif. Il est intuitif pour eux de **modifier leurs prédictions en fonction des résultats des expériences et des simulations** 2018) » (Batanero & al. 2024).

L'approche par un modèle a-priori
de l'expérience aléatoire :
le modèle de l'équiprobabilité
ou
géométrie du hasard

- **Approche du hasard par le modèle de l'équiprobabilité (Parzysz 2019)**

D'abord recenser les issues possibles, justifier l'équiprobabilité des issues , exprimer la probabilité d'un évènement sous la forme « a chances sur b ».(programme 2025)

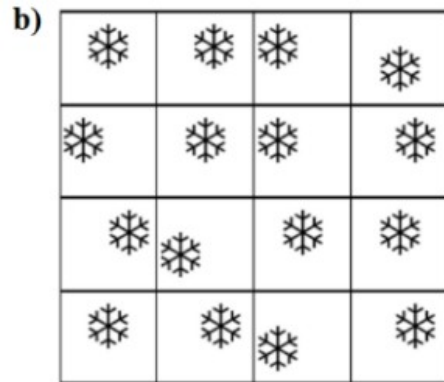
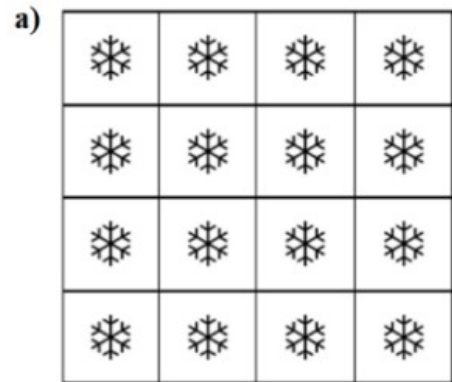
- **Points de vigilance :**

- Ne pas naturaliser le modèle de l'équiprobabilité.
- Bien discuter les arguments (symétrie, mêmes conditions de tirage, objets semblables ...)
- Pour une même expérience aléatoire on peut s'intéresser à différents types de résultats possibles qui donneront des listes d'issues possibles différentes.
- La difficulté de préciser l'expérience aléatoire (tirage avec ou sans remise, chute de la tartine beurrée, paradoxe de Bertrand). Parfois on impose des conditions sans en être conscient, comme si elles étaient naturelles (tirage avec remise, changer de jeteur de dé...)

Modélisations correcte vs incorrectes



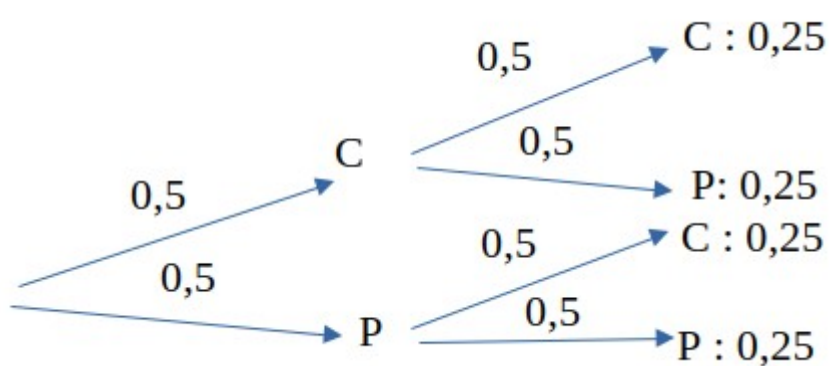
(Eduscol 2025)
<https://eduscol.education.fr/document/64872/download>



(Piaget & Inhelder 1951)

L'exemple historique de D'Alembert (1761)

« Lorsqu'on jette une pièce deux fois il n'y a que trois cas possibles, savoir : croix deux fois, pile deux fois, ou croix et pile. Ces trois cas sont également possibles, donc chacun doit être estimé à un tiers [...] Les deux cas croix-pile et pile-croix ne diffèrent point en réalité, puisqu'ils donnent le même résultat ; il n'y a donc aucune raison de les distinguer. »



Croix-croix : 0,25

Croix-pile ou pile-croix :
 $0,25 + 0,25 = 0,5$

Pile-pile : 0,25

Comparer des issues d'expériences aléatoires ou des évènements. Exprimer la probabilité d'un évènement sous la forme « a chances sur b »

Dans sa boîte, Eduardo a 10 boules blanches et 20 boules noires. Pour sa part, Luis en a 30 blanches et 60 noires. L'enfant qui sort le premier une boule blanche gagne 1 euro. Si les deux enfants sortent en même temps une boule blanche ou une boule noire, aucun des deux ne gagne. Ils remettent les boules dans les boîtes et le jeu continue. Eduardo affirme que le jeu n'est pas équitable parce que, dans la boîte de Luis, il y a plus de boules blanches. Qu'en penses-tu ?

Un jeu équitable est un jeu où aucun joueur n'a un avantage sur un autre (par exemple le fait de commencer ne donne pas un avantage).

(Canizares & al. 1999) (autour de 10 % de réussite en classe 5 de primaire (CM2) et 23 % en classe 6 de primaire (6^e) avec 3 stratégies principales : comparaison de proportions (nombres de cas favorables et total des cas, ou cas favorables et cas défavorables), comparaison du nombre de cas favorables, ou comparaison du nombre de cas défavorables. Une partie des élèves sont interrogés pour discuter de leur justifications.

Justifications d'élèves

A1 : « Je ne suis pas certain qu'Eduardo ait raison puisque Luis a aussi deux fois plus de boules noires que de blanches, donc les deux joueurs ont **autant de probabilités de gagner**. »

A2 : « Je crois que les deux joueurs bénéficient des mêmes conditions de jeu parce que **le rapport de boules noires et de boules blanches** est le même pour les deux. »

A3 : « Eduardo : 10 B et 20 N ; **$10/30$** = 0,33. Luis : 30 B et 60 N ; **$30/90$** = 0,33 : les probabilités d'obtenir ou de sortir une boule blanche sont les mêmes pour les deux joueurs.
»

A4 : « Eduardo a raison puisque Luis a plus de boules blanches et que ses probabilités d'en sortir une sont meilleures que celles d'Eduardo. »

A5 : « Eduardo est avantagé parce qu'il a moins de boules noires et donc plus de chances d'en sortir une blanche. »

A6 : « Eduardo a plus de possibilités, car la différence entre le nombre de ses boules blanches et de ses noires est plus petite, alors que Luis a 30 boules noires de plus que de blanches. Donc, il est plus probable que Luis sorte une boule noire. »

A7 : « Les deux joueurs ont les mêmes possibilités puisqu'il s'agit d'un jeu aléatoire et que gagner est une question de chance »

Difficultés : adéquation du modèle à la réalité

Exemple du tirage successif de deux cartes

- Tirage sans remise
- Tirage avec remise
- Cartes marquées

Approche par les fréquences (ou fréquentiste)

- **La loi des grands nombres:** si on répète une expérience aléatoire en s'intéressant à la fréquence d'un résultat donné, **dans des conditions identiques** (expériences indépendantes, suivant la même distribution de résultats ...) alors **la plupart du temps** la fréquence se rapproche d'un nombre fini (appelé fréquence théorique ou probabilité du résultat) quand le nombre de répétitions augmente.

(Dans cette définition vulgarisée il faudrait définir plus précisément les conditions identiques expressions employées ce que veut dire « indépendant », « même distribution », « la plupart du temps », « ... »), mais ce n'est pas l'ambition du programme de l'école primaire.

En lien avec la partie organisation des données, l'approche par les fréquences peut être abordée à l'école primaire comme le montrent (Brousseau & al. 2001 ; Richard 2004 ; Martin & al. 2019, Sill & al. 2019).

Les élèves observent dans leur vie quotidienne la fréquence d'événements. La justification par la loi des grands nombres n'apparaît qu'au programme de sixième : elle apparaît à l'école primaire chez certains élèves comme une connaissance en acte.

Points de vigilance :

- Bien faire observer la variabilité des fréquences de résultats.
- Une loi incorrecte des « petits nombres » est invoquée par des élèves : ils pensent à tort qu'il suffit de vérifier les résultats d'une expérience aléatoire avec un petit nombre d'essais.
- Cette approche peut être fréquentée sans être exigible.

L'approche fréquentielle (les listes)

(Brousseau, G. (2002) An experiment on the teaching of statistics and probability, Journal of Mathematical behavior, 20 (2002) 363-441.)

Richard, F. (2004) Un exemple de modélisation en situation : variante autour de la “bouteille de Brousseau” (compte-rendu d’une expérience en CM2). Comité Scientifique des IREM La modélisation. IREM de Paris 7, 36-38.

<https://archive.univ-irem.fr/IMG/pdf/Mod-Recueil.pdf>

Situation mise en place dans une classe de CM2 :
5 jetons, noirs ou blancs, dans un sac X non transparent..
Tâche : Etudier la composition du sac à l’aide de tirages avec remise.

Dans la **phase 1** (5 séances) :

- propositions de notations du type $nnnbbnbn$, fidèles au déroulement des tirages, puis totalisatrices du type $5n\ 4b$;
- recherche d'invariants parmi les séries de tirages : plus de noirs que de blancs dans le sac A ;
- apparition d'une "méthode" cherchant à identifier les tirages et le contenu des sacs : faire 5 tirages "puisque'il y a 5 boules dans un sac" ;
- mise au point d'un critère de décision d'arrêt dès qu'une série de 5 tirages a un effectif plus grand de 2 par rapport aux effectifs des autres tirages,
- introduction de fréquences : "trois élèves tirent chacun 5 boules, on totalise combien on a observé de blancs et de noirs et on divise par 3 pour trouver la composition de A" : $10n\ 5b$ donne $3,33n$ et $1,66b$.

Dans la **phase 2** (3 séances) un pas décisif est accompli par la proposition d'un élève de fabriquer un sac dont on connaîtra la composition [alors qu'on n'a pas le droit pour les sacs A, B et C] afin de voir s'il est vrai que les tirages ressemblent au contenu.

L'expérimentation est menée avec un matériel plus pratique pour effectuer les tirages, une bouteille opaque au bouchon transparent qu'il suffit de secouer et renverser pour noter un tirage. Les méthodes se poursuivent en s'améliorant ; en particulier il est fait appel à 150 séries de 5 tirages sur une bouteille A (constituée par la maîtresse à partir du sac A) d'où il ressort que A contient $3n$ et $2b$.

Dans la **phase 3**, conduite par la maîtresse, nous retrouvons les calculs et représentations graphiques classiques des longues séries des fréquences sur les 10k premiers tirages.

Ces trois phases se poursuivent dans l'expérimentation par :

Phase 4 : la convergence et la décision statistique (4 séances) ;

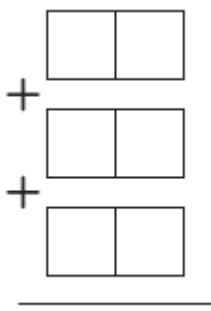
Phase 5 : les intervalles de décision (5 séances)

Phase 6 : les événements et leur probabilité (7 séances).

Quelques éléments de réflexion sur les programmes

Raisonnement de nécessité
et raisonnement de plausibilité :
utilisation des jeux

Les jeux : entre pur hasard et stratégie de nécessité ou de plausibilité (Cabassut 2025, 2026 ; Côté & al. 2019)



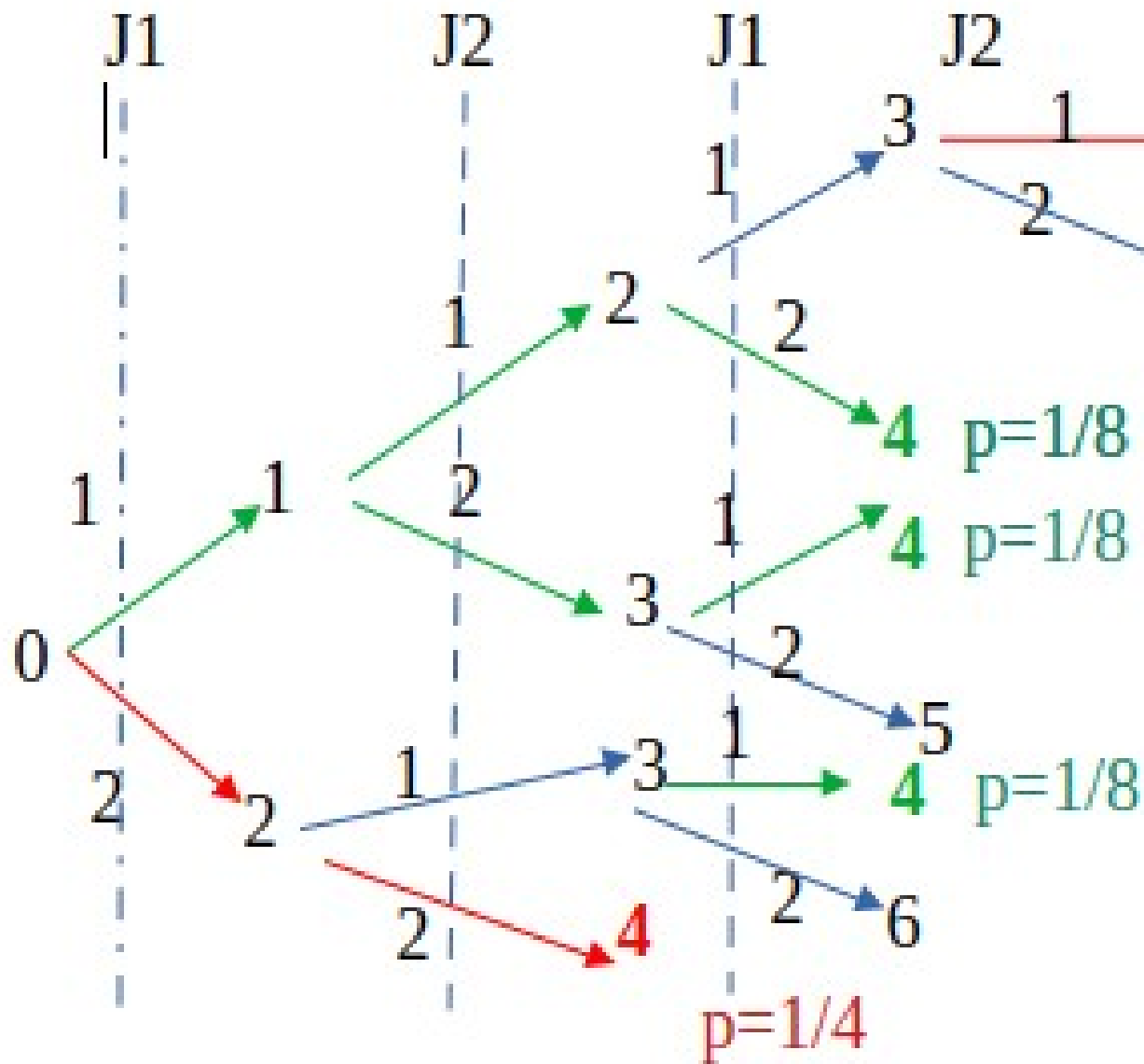
Les jeux de pur hasard :
la bataille, les petits chevaux avec un cheval par joueur

Jeu de pur hasard, de pure stratégie ou mixte ? la course à 4 2 joueurs J1 et J2. J1 ajoute 1 ou 2 à 0. J2 ajoute 1 ou 2 à la somme précédente. Ainsi de suite, et gagne le premier qui obtient la somme 4.
(d'après une idée de (Brousseau 1998))

Les jeux mixtes :

Qui peut le plus ?

Entre 2 joueurs, avec chacun une feuille réponse ci-dessus. On tire au hasard avec remise 1 carte d'un paquet de 9 cartes chiffrées de 1 à 9. Chacun écrit le chiffre dans une case de la première ligne de sa feuille. On répète le tirage pour remplir l'autre case, puis les lignes suivantes. A gagné celui qui a la plus grande somme. (IREM de Besançon 2007)



Si on suppose que les joueurs jouent au hasard sans stratégie, avec chaque fois une chance sur deux de jouer un des deux nombres (par exemple 1 pour pile et 2 pour face), la probabilité que J2 gagne est :

- $1/4 + 1/16 = 5/16$ pour J2 ,
- $1/8 + 1/8 + 1/8 = 3/8 = 6/16$ pour J1.

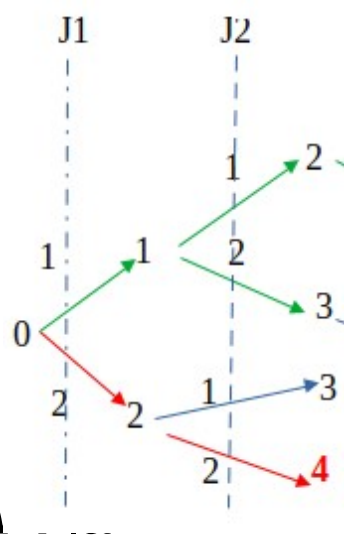
Il est plus plausible que J1 gagne plutôt que J2. Si J1 applique la stratégie gagnante (cheminements verts dans l'arbre), nécessairement J1 gagne ($p=1$).

Raisonnement de nécessité :

- **Argument de nécessité** (d'après (Toulmin 1958)) :
D (« données » parfois appelées en mathématiques « hypothèses » math) **supposée vraie**
d'après une règle d'inférence W (warrant chez Toulmin, en mathématiques souvent une règle logique ou un théorème)
alors C (conclusion de l'argument) est **nécessairement vraie**.

Exemple du jeu de bataille : **D** : le joueur A tire 2 et le joueur B tire 4 ; **W** : propriété mathématique $4 > 2$ et les règles du jeu de bataille ; **C** : B emporte le pli. (Dans W des connaissances mathématiques et des connaissances ludiques)

- Raisonnement de nécessité : successions d'arguments de nécessité (où souvent le C d'un précédent argument devient D d'un prochain argument).
- Exemple mathématique : le raisonnement hypothético déductif
A est vrai (D) ; (si A alors B) est vrai (W) ; donc B est vrai (C).
- **Exemple** : J1 joue 1 au 1^{er} coup (A), donc nécessairement J2 fait la somme 2 ou 3 au second coup (B).



Raisonnement de plausibilité :

Argument de plausibilité (d'après (Toulmin 1958)) :

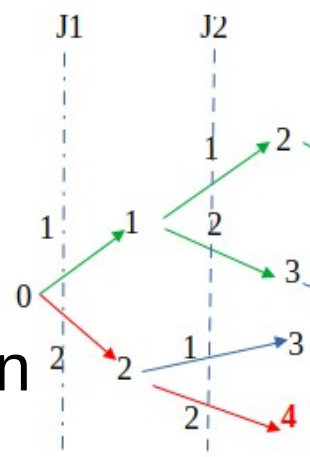
D (« données » parfois appelées en mathématiques « hypothèses » en math) **supposée vraie**

d'après une règle d'inférence W (warrant chez Toulmin, en mathématiques souvent la probabilité d'un événement) **alors C** (conclusion de l'argument) est **plausiblement vraie** (en mathématiques on pourra dire probablement vrai).

B est vrai (D) ; (si A alors B) est vrai (W) ; donc A est plausiblement vrai (C).

Ce raisonnement est souvent utilisé dans une démarche expérimentale ou heuristique.

Exemple : (J2 fait la somme 3 au second coup (B), donc il est plausible que J1 ait joué 1 au premier coup et J2 ait joué (A).



Raisonnement de plausibilité :

- Exemple du jeu de bataille avec 8 cartes 1 et 2 des 4 couleurs **D** : A découvre 1 pique au premier pli

- Raisonnement de plausibilité :

W : La probabilité

que B emporte le pli est $4/7$

C : Il est plausiblement vrai que B remporte le pli.

- Raisonnement de nécessité :

C : Il est nécessairement vrai que B a 4 chances sur 7 de remporter le premier pli.

	1T	1P	1Ca	1Co	2T	2P	2Ca	2Co
1T								
1P								
1Ca								
1Co								
2T		X						
2P		X						
2Ca		X						
2Co		X						

Premier verger :

Lancer le dé (4 faces de couleurs V,B, R,J une face avec un corbeau et une avec un panier) : avec une couleur on cueille un fruit de la couleur à déposer dans le panier ; avec le panier on choisit chacun son tour le fruit à cueillir ; avec le corbeau il avance d'une case sur le chemin vers le verger. On gagne la partie si on cueille tous les fruits avant que le corbeau rentre dans le verger.



Jeu de hasard ou jeu de stratégie ?

- On voit apparaître le **raisonnement déductif (Course à 4)** pour montrer que nécessairement on gagne si on applique la stratégie.
- Aussi longtemps qu'on n'a pas trouvé de stratégie, gagnante à tous les coups, on considère un jeu comme étant de hasard (exemple du jeu de Go pour un débutant), ce qui n'est pas satisfaisant mathématiquement mais satisfaisant d'un point de vue ludique.
- Pour les jeux qui sont un mélange de hasard et de stratégie (premier verger) on utilise les probabilités à deux niveaux : pour la partie hasard en invoquant un modèle du hasard (jet de dé, distribution ou tirage au hasard d'une carte (bataille, qui peut le plus), et pour la partie stratégie (jouer un coup qui augmente la probabilité de gagner (choisir un fruit dans un arbre ayant le plus de fruits dans « premier verger »). Dans ce cas on utilise **un raisonnement de plausibilité** si on joue d'une manière parce que cela augmente la probabilité de gagner (par exemple manière de jouer de J2 quand J1 ne joue pas la stratégie gagnante à coup sûr).
- Suivant la règle adoptée (petits chevaux avec un cheval ou deux chevaux) on peut influencer la part du hasard dans le jeu.
- Les jeux permettent de travailler différentes compétences : en probabilité (premier verger), sur les nombres (la bataille : comparaison des nombres), en raisonnement (argumentation sur la stratégie ou sur le hasard), ludique (apprendre des règles, contrôler l'application des règles, collaborer ...)...

Modèle a chances sur b et proportionnalité

Les pots de bonbons (Jaquet & al. 2014)

Dans un premier pot, Grand-mère met 6 bonbons à l'orange et 10 au citron

Dans un deuxième pot, elle met 8 bonbons à l'orange et 14 au citron.

Les bonbons sont de même forme et enveloppés de la même façon.

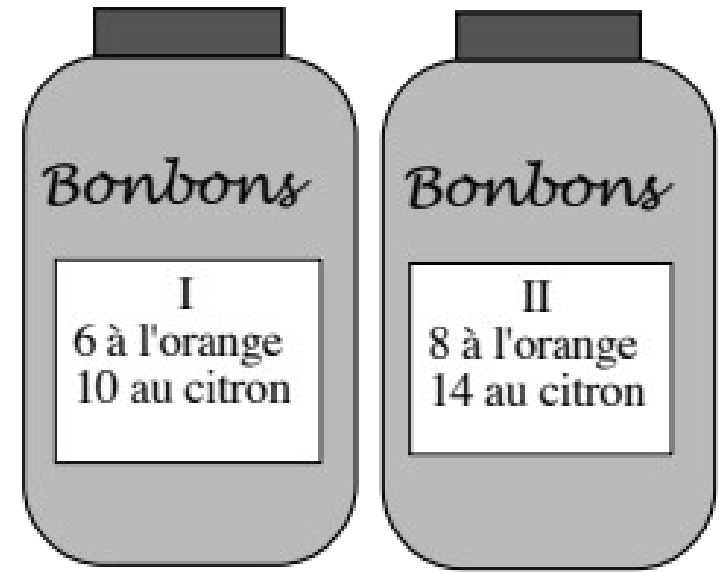
Comme Grand-mère sait que Julien n'aime pas le goût du citron, elle lui dit :

Tu peux prendre un bonbon. Je te laisse choisir le pot dans lequel tu pourras glisser ta main, sans regarder à l'intérieur.

Julien réfléchit bien et choisit enfin le pot où il pense avoir la meilleure chance de prendre un bonbon à l'orange.

À la place de Julien, quel pot auriez-vous choisi ?

Justifiez votre réponse en expliquant votre raisonnement.



« Il apparaît que les représentations des élèves sont étroitement liées à leur maîtrise de la proportionnalité, passant d'une appréhension des écarts dans le cadre de structures additives à une compréhension plus précise des rapports dans le cadre de structures multiplicatives au sens de Gérard Vergnaud [(Vergnaud, 1981)]. Nos résultats montrent que le passage d'une structure à l'autre dépend de l'âge des élèves et nous conduit à l'interpréter en termes de saut épistémologique.

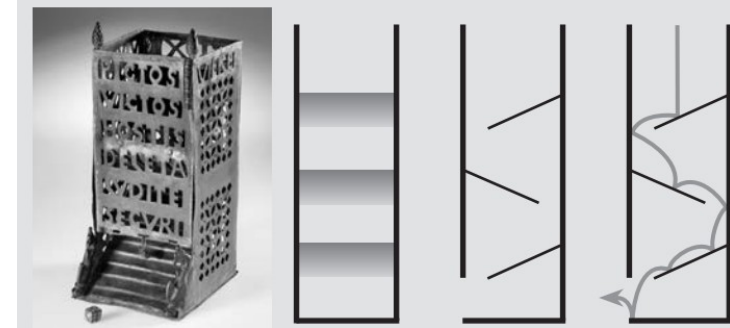
Nous avons pu constater que ce passage des procédures additives aux procédures multiplicatives se fait très précisément au même âge pour un problème de proportionnalité [...] en proposant Les pots de bonbons [...] nous pouvons facilement en imaginer les potentialités :

- conflit entre procédures reposant sur les écarts ou sur les rapports ;
- conflit entre les procédures additives qui conduisent au pot I avec les couples de nombres (6 ;10) et (8 ;14) pour Les pots de Bonbons [...] ;
- passage à la vérification sur de très grands nombres de tirages [...] vu que les conflits ne pourront vraisemblablement pas être résolus (à moins que l'enseignant n'impose sa vérité) » (Jaquet & al. 2014)

Comprendre la notion d'indépendance lors de la répétition de la même expérience aléatoire

Qu'est-ce qu'une même expérience ?

- Au même moment : pas de jets ou tirages successifs ?
- Faut-il que les dés soient jetés simultanément ou successivement ?
- Réalisé par la même personne ?
- Suivre la même distribution de probabilité ? Dans les tirages au hasard sans remises la distribution suivante n'est pas la même que la précédente.
- Dans les mêmes conditions ? Jeter simultanément deux pièces « identiques ». Sont-elles les mêmes si on peut les tenir dans deux mains différentes en même temps ? Doit-on regrouper croix-pile et pile-croix comme le proposait D'Alembert ? Jeter des dés « parfaits » mais de tailles différentes est-ce les mêmes conditions ?
- L'expérience répétée doit-elle être indépendante de la précédente pour être la même ? Voir la diapositive suivante pour la définition d'indépendance.



(Parzys p.46, in Martin & al. 2019)

Dépendance

- Dépendance physique : A est-il la cause de l'effet B ?
- Dépendance chronologique : A est réalisé avant B: la réalisation de B dépend-elle de celle de A ?
- Dépendance stochastique : A et B indépendants si $p(A \text{ et } B) = p(A) \times p(B)$
ou $p_{\text{sachant B réalisé}}(A) = p(A)$

L'indépendance chronologique

Lors de la répétition d'une même expérience :

Lancer successif d'un dé

« Ainsi, lors de situations où il n'y a pas de dépendance entre les événements, ils [les élèves] ont tendance à ne pas considérer l'indépendance entre les événements et ils vont ainsi prédire le prochain résultat selon les résultats obtenus ». (Batanero 2019, p.129)

Lors d'un jeu : la probabilité de gagner d'un joueur change suivant un événement précédent (choix de jeu précédent d'un joueur)

Exemple la course à 4 : La course à 4 : le choix de J1 au 1^{er} coup influe sur les chances de gagner de J2.

Mon premier verger : Dans mon premier verger le choix de la couleur de fruit avec le panier change les chances que le corbeau a de gagner.

L'indépendance stochastique

(a priori pas au programme)

- La condition définit un nouvel univers des possibles et un nouvel événements :
 $p_{\text{sachant B réalisé}}(A)$ = rapport du nombre de cas qui réalisent A et B réalisés conjointement et du nombre de cas réalisant B
Il y a indépendance stochastique de A et B si $p_{\text{sachant B réalisé}}(A) = p(A)$
- Exemple précédent d'un jeu de dé. A : « avoir 6 »
B : « avoir la somme des faces latérales égale à 14 »
 $p_{\text{sachant B réalisé}}(A) = 1/2$ et $p(A) = 1/6$ donc A et B dépendants.

Les représentations en tableaux

(Brêchet 2022)

A-t-on plus de chance d'avoir 6 au second jet de dé si on a déjà eu 6 au premier jet ?

On peut utiliser une représentation en tableau pour deux jets successifs de dés. Il y a 36 cases grises correspondant aux différentes issues de deux jets successifs de dés et 6 cases croisées correspondant au cas où le second jet affiche 6, soit une probabilité de $6/36$, soit $1/6$. Dans le cas où le premier jet donne 6 et le second également 6, il y a une case croisée sur 6 cases grisées, soit une probabilité de $1/6$.

L'indépendance peut être appréhendée dans l'exemple de la répétition du tirage, sans remise, qui fait que l'expérience répétée n'est plus la même.

		1 ^{er} jet					
		1	2	3	4	5	6
2 ^e jet	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6	×	×	×	×	×	×

		1 ^{er} jet					
		1	2	3	4	5	6
2 ^e jet	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						×

Plus généralement, il est intéressant de voir comment une condition influe sur le nombre de cas favorables et le nombre total de possibilités, et donc sur la probabilité de l'événement sachant cette condition. Ensuite il faudra observer si la probabilité de l'événement sous cette condition reste inchangée, ce qui déterminera l'indépendance par rapport à la condition. Pour le problème suivant : « *Un couple a deux enfants, dont l'un au moins est une fille née un mardi. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?* », (Brêchet 2022) propose d'utiliser un tableau pour déterminer cette probabilité. Il y a 27 cases grises équiprobables représentant deux enfants dont l'un au moins est une fille née un mardi et 13 cases croisées représentant les cas favorables à 2 filles.

		1 ^{er} enfant													
		fille							garçon						
		Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di	Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di
2 ^e enfant	fille	Lu	×												
	Ma	×	×	×	×	×	×	×							
	Me		×												
	Je		×												
	Ve		×												
	Sa		×												
	Di		×												
	garçon	Lu													
	Ma														
	Me														
	Je														
	Ve														
	Sa														
	Di														

Les représentations en probabilités

- **Différentes représentations**

Utiliser différentes représentation (expérimentation réelle, description orale ou écrite, utilisation de listes, tableau, arbres ...).

Prendre en compte la différence entre le vocabulaire quotidien et le vocabulaire mathématique (possible, certain, probable, évènement ...)

- **Points de vigilance :**

Pour apporter la bonne remédiation aux élèves en difficulté bien distinguer les difficultés de conversions d'une représentation à une autre (passer d'une expérience à un tableau) et les difficultés de traitement au sein d'une même représentation (dans un arbre, un tableau, un rapport de nombre de chances ...) .

Modèle a chances sur b et proportionnalité

Les pots de bonbons (Jaquet & al. 2014)

Dans un premier pot, Grand-mère met 6 bonbons à l'orange et 10 au citron

Dans un deuxième pot, elle met 8 bonbons à l'orange et 14 au citron.

Les bonbons sont de même forme et enveloppés de la même façon.

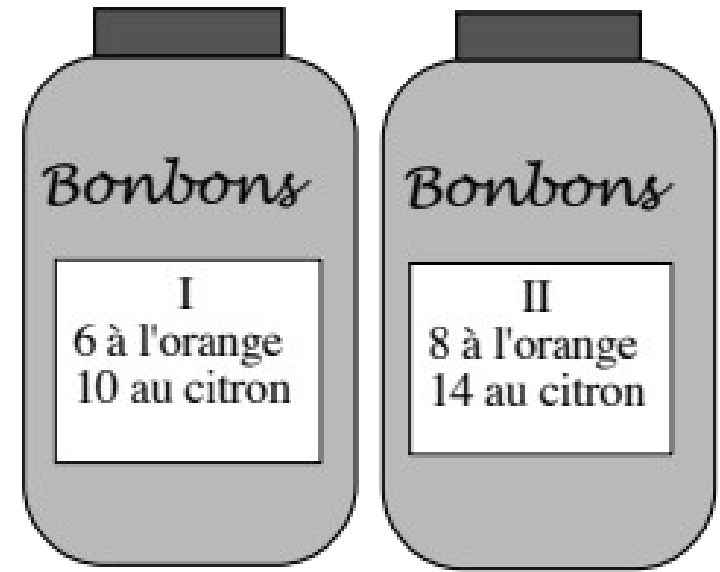
Comme Grand-mère sait que Julien n'aime pas le goût du citron, elle lui dit :

Tu peux prendre un bonbon. Je te laisse choisir le pot dans lequel tu pourras glisser ta main, sans regarder à l'intérieur.

Julien réfléchit bien et choisit enfin le pot où il pense avoir la meilleure chance de prendre un bonbon à l'orange.

À la place de Julien, quel pot auriez-vous choisi ?

Justifiez votre réponse en expliquant votre raisonnement.



« Il apparaît que les représentations des élèves sont étroitement liées à leur maîtrise de la proportionnalité, passant d'une appréhension des écarts dans le cadre de structures additives à une compréhension plus précise des rapports dans le cadre de structures multiplicatives au sens de Gérard Vergnaud [(Vergnaud, 1981)]. Nos résultats montrent que le passage d'une structure à l'autre dépend de l'âge des élèves et nous conduit à l'interpréter en termes de saut épistémologique.

Nous avons pu constater que ce passage des procédures additives aux procédures multiplicatives se fait très précisément au même âge pour un problème de proportionnalité [...] en proposant Les pots de bonbons [...] nous pouvons facilement en imaginer les potentialités :

- conflit entre procédures reposant sur les écarts ou sur les rapports ;
- conflit entre les procédures additives qui conduisent au pot I avec les couples de nombres (6 ;10) et (8 ;14) pour Les pots de Bonbons [...] ;
- passage à la vérification sur de très grands nombres de tirages [...] vu que les conflits ne pourront vraisemblablement pas être résolus (à moins que l'enseignant n'impose sa vérité) » (Jaquet & al. 2014)

La simulation

- Non numérique : tirer au hasard au dé, à pile ou face, avec la bouteille de Brousseau, à la roulette ...
- Numérique : boîte noire ou programmation ?

(Thibault p.169, Venant & al. p.271 in Martin 2019) : tableur , scratch

Afficher la face d'un dé pipé dans Scratch



Probabilité et théorie de la mesure

Grandeur géométrique

Un objet : un carreau de carrelage

Un modèle : un carré aux dimensions du carreau

Exemple d'espèces de grandeurs : périmètre du carré, longueur de la diagonale, aire ...

Toutes les grandeurs ne sont pas mesurables : par exemple pas d'additivité des périmètres

Une mesure de la grandeur longueur de la diagonale : longueur en cm de la diagonale.

Les mesures géométriques de grandeurs continues sont des nombres réels positifs. certains aussi grands que souhaité

(Cabassut 2024)

Grandeur probabiliste

Un événement : le lancer d'un dé

Un modèle : un lancer au hasard d'un dé « parfait » et « normal »

Exemple d'espèces de grandeurs probabilistes : nombre affiché sur la face supérieure, somme des nombres des faces latérales.

Tous les événements sur des univers finis de possibles sont mesurables par une mesure de la grandeur probabiliste de l'événement, appelée probabilité de l'événement. Toutes les probabilités sont des nombres positifs de $[0;1]$.

Exemple pour le lancer de dé précédent :

$$p(\text{avoir } 6) = 1/6$$

$$p(\text{avoir la somme } 14) = p(\text{avoir } 6 \text{ ou } 1) = 1/3$$

Formation des professeurs : conception de l'indépendance (Fernandes 2024)

Consigne aux 37 formés :

1. Dans chacun des items vérifiez si les événements A et B sont indépendants.

a. A : « obtenir face pile au premier lancer » et B : « obtenir face bouclier au deuxième lancer », dans l'expérience aléatoire consistant à lancer une pièce deux fois. (38 % correct)

b. A : « obtenir deux faces paires » et B : « obtenir deux faces supérieures à 5 », dans l'expérience aléatoire consistant à lancer deux fois un dé numéroté de 1 à 6. (5 % correct)

2. Concernant une expérience aléatoire,

a. Définissez les conditions d'indépendance de deux événements A et B. (86 % correct $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ ou $p_B(A) = p(A)$)

b. Définissez deux événements indépendants A et B, différents de ceux définis à la question 1. (11 % correct)

Formation des professeurs : scénario de formation

Consigne aux formés (d'après Batanero & al. 2019, p.232)

1. Résoudre le problème donné (formation en 2025 en Corse avec des boîtes de boules blanches et noires d'Eduardo et Luis)

2. Décrire les connaissances mathématiques nécessaires pour pouvoir donner la bonne réponse.

3. Indiquer, parmi les réponses des élèves, celles qui sont correctes et celles qui sont erronées.

4. Pour chaque réponse erronée, expliquer les raisonnements erronés qui ont mené les élèves à donner cette réponse.

Bilan de la recherche de (Batanero & al. 2019, p.241-242)

« l'intérêt du jeu équitable dans l'enseignement au primaire parce qu'il découle du **penchant que démontrent les enfants pour les jeux**. Ces jeux permettent de contextualiser différents concepts de probabilité, notamment la **compréhension du caractère aléatoire des jeux**, l'énumération des cas possibles (espace échantillonnal [univers des possibles]) et favorables, la capacité à **comparer les probabilités** et l'intuition de ce qu'est l'espérance mathématique. Enfin, l'intérêt du jeu équitable découle également du fait qu'il est à **l'origine du calcul des probabilités**. Nous avons vu aussi comment les **situations proposées aux élèves peuvent être transformées pour servir à la formation des enseignants** [...] Nous avons décrit plusieurs **difficultés**, dont le manque de capacité à faire un **raisonnement combinatoire ou proportionnel**, la difficulté à **distinguer des évènements équiprobables de ceux qui ne l'étaient pas**, l'incapacité à travailler avec la proportionnalité inverse, le fait de considérer qu'un jeu n'est équitable que si tous les joueurs ont la même probabilité de gagner, ou s'ils reçoivent le même prix, et enfin la difficulté à calculer le résultat qu'il faudrait pour transformer un jeu inéquitable en un jeu équitable. Quelques-unes de ces difficultés, bien que moins fréquentes, apparaissent aussi chez les futurs enseignants. »

Problème plus difficile traité dans (Batanero & al. 2019, p. 232) où un jeu est équitable si l'espérance mathématique du gain du joueur est nulle.

Miguel et Luis jouent avec deux dés ordinaires (comme tu le sais, chaque dé est numéroté de 1 à 6). Ils lancent les deux dés et multiplient les nombres obtenus. Miguel gagne 1 euro si le produit est pair et Luis, 1 euro si le produit est impair. Le jeu te semble-t-il équitable ? Pourquoi ? Combien Luis devrait-il gagner, si Miguel gagne 1 euro, pour que le jeu soit équitable ?

Formation : besoins des formés (Chernoff & al. 2018, p.277 – 291)

363 futurs professeurs de mathématiques résolvent le type de problème :
Parmi les résultats suivants, lequel est le moins probable après six lancers d'une pièce équilibrée ?

- a) Cinq faces et une pile
 - b) Quatre faces et deux piles
 - c) Les deux résultats (a et b) ont la même probabilité d'apparaître [69 %].
- Justifier.

La recherche s'intéresse à la réponse incorrecte c donnée par 71 % des étudiants. Dans cette réponse est étudié l'argument de composition qui étend au tout (équiprobabilité pour les résultats a et b des 6 lancers) les propriétés des parties (pour chaque lancer de dé, pile et face sont équiprobables).

Voici un exemple de justification avec cet argument :

Sam : Les résultats a et b ont la même probabilité d'apparaître car la probabilité d'obtenir pile ou face à chaque lancer est égale (50/50).

10 % des réponses incorrectes utilisent l'argument de composition.

Ceci montre que pour ces futurs professeurs la notion d'équiprobabilité n'est pas justifiée correctement.

Formation de (Chernoff 2019, p.195-217)

Supposons que vous avez trois cartes. Une dont les deux faces sont rouges. Une dont les deux faces sont bleues. Une dont une face est rouge et l'autre, bleue. Toutes les cartes sont déposées dans un chapeau, d'où l'une est tirée au hasard, puis déposée sur une table. La face visible est rouge. Quelles sont les probabilités que l'autre face soit bleue ?

« les apprenants répondent que la probabilité que la face cachée de la carte soit bleue est de $1/2$. Lorsqu'on leur demande ensuite d'expliquer leur réponse, voici, à quelques variantes près, ce qu'ils disent : » Eh bien, nous savons que la carte pigée [tirée] n'est pas la carte bleue-bleue, car nous voyons (qu'une face est) rouge. Alors, il ne reste que deux cartes dans le chapeau, la carte rouge-rouge et la carte rouge-bleue. Si nous voyons rouge et que nous retournons la carte, l'autre face sera bleue ou rouge, **il n'y a que deux possibilités ; la réponse est donc 50-50** ».[...] définir la probabilité d'un évènement comme le rapport entre le nombre de résultats favorables et le nombre de résultats possibles ne fonctionne que si les résultats possibles sont équiprobables.[...] Notre travail, en tant qu'enseignants, n'est pas de dire catégoriquement aux étudiants qu'ils sont dans l'erreur. Notre travail est de partir de leurs idées, de leurs intuitions, afin de les aider à **comprendre ce qu'est l'équiprobabilité et à quel moment il faut ou non l'appliquer.**»

Types de tâches (Martin & al. 2019)

Tâches liées à une approche théorique (vocabulaire, modèle)

Tâche liée au vocabulaire

Peux-tu toujours prédire un événement ou un phénomène avec certitude ?

- a) Est-ce que les événements suivants sont certains, possibles ou impossibles ? Trace un X dans la case appropriée.

Événements	Certain	Possible	Impossible
1) En lançant un dé, j'obtiendrai un 4.			
2) Si aujourd'hui c'est lundi, demain ce sera mardi.			
3) Si je lance une pièce de monnaie, elle tombera du côté pile.			
4) Le mois prochain, j'irai sur la planète Mars.			
5) Demain, ce sera ensoleillé.			

Tâche de calcul ou dénombrement

Les faces de ce cube sont numérotées de 1 à 6.

- a) Quels sont tous les résultats que tu peux obtenir en faisant rouler une fois ce cube numéroté?

Sépare tes réponses par une virgule.



- b) Quelle est la probabilité d'obtenir un 3?

- c) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre **plus petit** que 5?

Écris ta réponse sous la forme d'une fraction simplifiée.

Tâches liées à une approche fréquentielle

Une boîte contient 10 jetons blancs, bleus et rouges. Le nombre de jetons de chaque couleur est inconnu.

Cinq équipes ont effectué 20 tirages chacune. Chaque fois, le jeton tiré était remis dans la boîte. Voici les résultats des tirages.

	Nombre de jetons blancs tirés	Nombre de jetons bleus tirés	Nombre de jetons rouges tirés
Équipe 1	10	7	3
Équipe 2	14	5	1
Équipe 3	8	8	4
Équipe 4	12	4	4
Équipe 5	13	7	0

Estime le nombre de jetons de chaque couleur dans la boîte.

Explique comment tu as procédé.

Jonathan et Mariella ont perdu les deux dés qui leur servaient à jouer au jeu des serpents et des échelles. Pour les remplacer, Mariella propose d'écrire sur des bouts de papier toutes les sommes que l'on peut obtenir en lançant deux dés, puis de tirer au hasard des papiers d'un contenant.

- Selon toi, ce matériel remplace-t-il bien les dés? Explique ta réponse.
- Afin de vérifier ta réponse à la question a), fais les deux expériences suivantes.

Expérience 1

Lance deux dés au moins 70 fois et note les résultats dans le tableau qu'on te remet.

Prénom: Jonathan											
Essais	Sommes possibles avec deux dés										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1			X								
2								X			

Expérience 2

En utilisant le matériel de Mariella, fais au moins 70 tirages et note les résultats dans le tableau qu'on te remet.

- Compare les résultats des deux expériences.
- Ta réponse à la question a) te semble-t-elle juste? Explique pourquoi.

Tâches liées à une approche subjective

Une liste d'activités possibles, habituellement faites pendant les vacances (ou la fin de semaine) est dressée. L'élève doit déterminer s'il est certain de pouvoir réaliser ces activités. Ainsi, l'élève doit exprimer une opinion probabiliste quant à la possibilité de réaliser chacune de ces activités et proposer une explication.

Activités	Oui	Non	Explication
1. Jouer à des jeux vidéo.			
2. Aller visiter tante Sophie.			
3. Patiner au parc.			
4. Patiner à l'aréna municipal.			
5. Jouer aux cartes.			
6. Jouer au bingo avec mon frère.			
7. Naviguer dans Internet.			
8. Aller faire du ski.			
9. Aller à mon cours de ski.			
10. Aller à mon cours de piano.			
11. M'exercer au piano.			
12. Jouer aux échecs avec papa.			

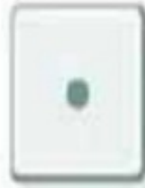
Tâches articulant plusieurs approches

L'expérience consiste à faire tourner le dé jusqu'à ce que tu obtiennes un 6.

Selon toi, combien de fois dois-tu faire tourner le dé pour obtenir un premier 6?

Fais maintenant tourner le dé ci-dessous le nombre de fois que tu as indiqué.

Clique sur le dé pour le faire tourner.



As-tu obtenu un 6 dans le nombre de tours que tu as estimé?

☐ Oui

☐ Non

Dylan a placé 10 boules de quatre couleurs (verte, jaune, bleue et noire) dans un sac. À 40 reprises, Maude a pigé une boule dans ce sac. À chaque fois, elle remettait la boule dans le sac avant d'en piger une autre.

Le **tableau de gauche** illustre les résultats obtenus par cette **simulation**. Le **tableau de droite** illustre ce qui aurait **théoriquement dû être obtenu**.

Probabilité expérimentale

Couleur	Effectif
	8
	11
	16
	5

Probabilité théorique

Couleur	Effectif
	16
	12
	8
	4

- a) Maude tient compte du tableau de gauche qui présente les résultats obtenus à l'aide de la **probabilité expérimentale**.

D'après toi, quelle couleur choisirait-elle comme étant celle qui apparaît le plus souvent dans le sac?

Choisis la bonne réponse.



- b) Maude tient compte du tableau de droite qui présente les résultats obtenus à l'aide de la **probabilité théorique**.

D'après toi, quelle couleur choisirait-elle comme étant celle qui apparaît le plus souvent dans le sac?

Choisis la bonne réponse.



Conclusion de la promenade aléatoire

- « L'école le temps des dés, le collège le temps de la simulation, le lycée le temps de la théorie » (Roser et Schwartz 2009)
- Les compétences : communiquer (vocabulaire (ex : promenade aléatoire), verbaliser, écrire), chercher (expérimenter), représenter (traitement inter-registres et intra-registres de Duval), modéliser (l'importance des représentations et de la verbalisation (Duval 2006), raisonner.
- Les traces écrites de l'institutionnalisation, notamment sur les raisonnements
- Les mathématiques science expérimentale (manipulation, simulation)
- Une communauté de pratique (constellations, groupes IREM ...)
- Articulation action/ recherche (laboratoires mathématiques, IREM, université ...)

Quelques ressources en probabilités

- Batanero, C., Chernoff, E. J. (Eds.) (2018) *Teaching and Learning Stochastics*. Springer Cham.
- Batanero, C., Álvarez-Arroyo, R., Hernández-Solís, L. A., & Gea, M. M. (2021). El inicio del razonamiento probabilístico en la educación infantil (Beginning of probabilistic reasoning in pre-school education). *PNA*, 15(4), 267–288.
- Batanero, C., Alvarez-Arroyo, R. (2024) Teaching and learning of probability. *ZDM – Mathematics Education* 56, 5-17.
- Brêchet, M. (2022) Déconcertant hasard. *Rmé*, 237, 34-40.
- Brousseau, G., Brousseau, N. et Warfield, V. (2001). An experiment on the teaching of statistics and probability. *Journal of Mathematical Behavior*, 23, 1-20. Version en français : <https://ardm.eu/guy-brousseau/guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/03/Une-exp-de-1er-enseignement-de-s-stat2001.pdf>
- Cabassut, R. (2025) Le hasard à l'école primaire : quels enjeux ? *Au fil des maths*, 558.
- Cabassut, R. (2026 à paraître) *Les jeux en mathématiques : entre plausibilité et nécessité*. Actes du 51^e Colloque COPIRELEM. Strasbourg 2025.
- Canizares, M.J., Batanero, C., Serrano, L. et Ortiz, J.J. (1999). Comprensión de la idea de juego equitativo en los niños. *Números*, 37, 37-55.
- Côté, L., Biron, D. (2019) Initier les élèves du préscolaire aux premiers concepts probabilistes par les jeux de règles. In Martin, V., Thibault, M. et Theis, L. (2019). *Enseigner les premiers concepts de probabilités : un monde de possibilités ! Presses de l'Université du Québec*, pp. 101-126.
- Chernoff, E.J., Vashchyshyn, I., Neufeld, H. (2018). Comparing the Relative Probabilities of Events. In: Batanero, C., Chernoff, E. (eds) *Teaching and Learning Stochastics. ICME-13 Monographs*. Springer. 277-291.
- Chernoff, E., J. (2019) L'espace échantillonnal : un univers d'interprétations possibles. In Martin, V., Thibault, M. et Theis, L. (2019). *Enseigner les premiers concepts de probabilités : un monde de possibilités ! Presses de l'Université du Québec*, 195-218.

- Fernandes, J.-A. (2024) Knowledge of independent events by prospective primary school teachers. *Revemop*, 2024, vol.6,1-16.
- Fetzer, M. (2011): Wie argumentieren Grundschul Kinder im Mathematikunterricht? Eine argumentationstheoretische Perspektive. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 32 (1), 27–51
- Herzog, M., Ehlert, A., Fritz, A. (2017) Kombinatorikaufgaben in der dritten Grundschulklasse. Darstellung, Abstraktionsgrad und Strategieeinsatz als Einflussfaktoren auf die Lösungsgüte. *JMD* 38(2), 263–289.
- IREM de Besançon (Groupe Élémentaire de l'IREM de Franche Comté) (2007). Qui peut le plus ? Introduction de l'aléatoire en cycle 3. *Grand N* n° 80, pp. 43 à 58.
- Jaquet, F., Henry, M. (2014) Approche de la notion de probabilité chez des enfants de 10-15 ans. *Repères-IREM*. N° 94, 5-20.
- Kuzmak, S. D., Gelman, R. (1986). Young children's understanding of random phenomena. *Child Development*, 57(3), 559-566.
- Martin,V., Thibault, M., Theis, L. (2019). *Enseigner les premiers concepts de probabilités : un monde de possibilités !* Presses de l'Université du Québec.
- Parzysz, B. (2019). Des fréquences aux probabilités : apprendre à modéliser. In *Martin, V., Thibault, M. et Theis, L. (2019). Enseigner les premiers concepts de probabilités : un monde de possibilités ! Presses de l'Université du Québec*, 43-70.
- Piaget, J., Inhelder, B. (1974) *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. PUF. p.197.
- Richard, F. (2004) Un exemple de modélisation en situation : variante autour de la “bouteille de Brousseau” (compte-rendu d'une expérience en CM2). Comité Scientifique des IREM La modélisation. IREM de Paris 7, 36-38. <https://archive.univ-irem.fr/IMG/pdf/Mod-Recueil.pdf>
- Sill, H.-D., Kurtzmann, G.(2018) Entwicklung und Erprobung einer internetgestützten einjährigen Lehrerfortbildung „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ für Primarstufenlehrpersonen. In *Biehler, R., Lange, T., Leuders, T., Rösken-Winter, B., Scherer, P., Selter, C. (Hrsg.) (2018) Mathematikfortbildungen professionalisieren. Konzepte, Beispiele und Erfahrungen des Deutschen Zentrums für Lehrerbildung Mathematik Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik*. 99–116. Springer, Wiesbaden.
- Sill, H.-D., Kurtzmann, G. (2019) *Didaktik der Stochastik in der Primarstufe*. Springer Spektrum Berlin.

Merci pour votre attention.
Des questions ?