Devoir à la maison de 3 ème
Somme des n premiers nombres entiers

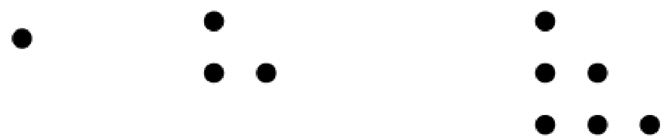
L'objet de ce devoir est de trouver une formule pour calculer la somme des n premiers nombres entiers. On notera cette somme S_n.

Exemple : si n = 7 alors $S_7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$.

1. Calculer S_5, S_{11} et S_{17}.

Il est évident que si n devient très grand, alors le calcul de S_n devient bien difficile. Dans ce cas, il peut-être utile de trouver une expression de S_n plus simple.

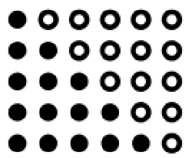
2. *Nous allons trouver une formule selon la méthode des Grecs dans l'antiquité.* Pour cela, on représente les nombres entiers par des points. On appelle ainsi **nombres triangulaires** les nombres de la forme :



le nombre 1 le nombre 1 + 2 = 3 le nombre 1 + 2 + 3 = 6

On remarque justement que ces nombres triangulaires sont les sommes des n premiers nombres entiers.

a) *Faisons le raisonnement pour n = 5.*
Ci-dessous, on a représenté tête-bêche deux triangles représentant la somme S_5.



Expliquer comment on peut facilement calculer le nombre total de points dans cette figure. Combien de fois est représentée la somme S_5 ? En déduire un calcul simple de S_5.

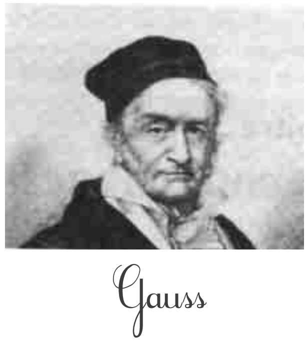
b) *Faire le même raisonnement dans le cas général pour trouver la formule de* S_n.
Vérifier ensuite la formule obtenue pour les valeurs de n utilisées à la question 1.

3. *Nous allons retrouver la même formule selon la méthode de Gauss, un mathématicien qui eu l'idée de ce raisonnement à l'âge de 8 ans !*

a) *Faisons le raisonnement pour n = 5.*

Ci-dessous, on a écrit la somme S_5 en disposant les termes dans l'ordre croissant et, juste en dessous, on écrit la même somme S_5 en disposant les termes dans l'ordre décroissant.

$$\begin{array}{rl} & S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\ + & S_5 = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\ \hline & 2S_5 = 6 + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots \end{array}$$



• Recopier le contenu du cadre ci-dessus et compléter la somme des termes pour chacune des colonnes du calcul précédent (exemple pour la première colonne : 1+5 = 6). Que constate-t-on ?

• Dans la ligne du résultat, écrire le membre de droite sous la forme d'un produit. En déduire ensuite une expression de S_5.

b) *Refaire le même raisonnement pour n = 11* et montrer que l'on obtient :

$$S_{11} = \frac{11 \times 12}{2}$$

c) *Faire maintenant le raisonnement dans le cas général (on ne donne plus de valeur particulière à n).*

On pose $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots. + (n-2) + (n-1) + n$. On suivra pas à pas la même méthode qu'à la question 3a.

Vérifier que l'on trouve la même formule qu'à la question 2b.

4. Calculer la somme S_{48} des 48 premiers nombres entiers.

5. *Qui était Gauss ?*

Quel est son prénom ? Quelle est sa nationalité ? Quelles sont ses dates de naissance et de mort ? Citer trois notions mathématiques sur lesquelles il a travaillé.

Vous pouvez ajouter d'autres informations, si vous le souhaitez.

Citer vos sources.