

The Pi-Day

La date en anglais MM-JJ-AA donc 14 mars 2016

devient 3-14-16 (arrondi de 3,14159)

mais tous les ans 3-14-..

Activités autour de Pi ... géométrie, calcul, poésie,
programmation, anglais, reportage, affiche, article,
décoration, jeux ...

Jour anniversaire d'Albert Einstein et de Waclaw
Sierpinski ...

The Pi-Day

- Ecrire un programme de conversion des dates Fr/GB
- Tableaux mathémagiques
- Aiguille de Buffon : activité proposée par l'IREM
- Différentes méthodes de calcul de Pi
- Invention d'unité le « Pi-.... »
J'ai 12,74 Pi-ans
La longueur d'un marathon est 13,438 KiloPimètre
- Etudier la répartition des décimales de Pi (calcul de fréquence)
- Créer des affiches sur Pi (record, histoire...)

L'aiguille de Buffon

Expérimentation :

Lancer une (ou plusieurs) « aiguille » (cure dent) sur des lignes parallèles équidistante et compter le nombre d'essais où l'aiguille coupe une ligne (aiguille $<$ ligne).

Regrouper les résultats du groupe et saisir sur le site

https://shiny.math.cnrs.fr/semaine_des_mathematiques/ « a » la

longueur de l'aiguille « b » la distance en deux lignes le

nombre total d'essai N et le nombre d'intersections n

L'aiguille de Buffon

Activité proposée par le groupe proba-stat l'IREM.

<http://math-interactions.u-bordeaux.fr/Centres-de-ressources/IREM/Groupes/Probabilites-et-statistique>

- Exploiter la mise en commun de données
- Travailler la fréquence, la fluctuation et la simulation (3e-2de) d'une proportion inconnue
- Obtenir un intervalle de confiance

L'aiguille de Buffon

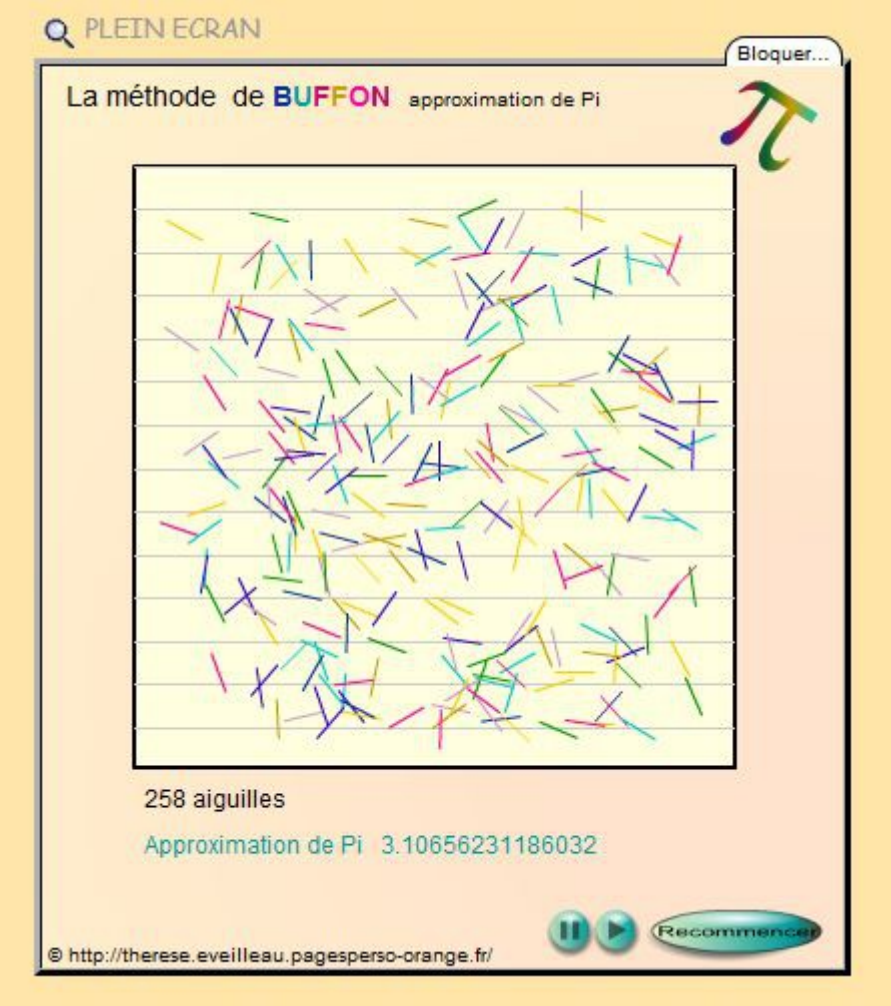
La fréquence tend vers la probabilité $2a/b\pi$

Donc en choisissant $a=b$ c'est à dire des lignes ayant comme espacement la longueur de l'aiguille, la fréquence tend vers $2/\pi$.

Démonstration est complexe (Borel ou avec l'intégration d'un sinus...)

L'aiguille de Buffon

Simulations sur le site de Thérèse Eveilleau avec le nombre de lancers qui défilent et la valeur de π qui fluctue.



The screenshot shows a web browser window with a yellow background. At the top left, there is a search icon and the text "PLEIN ECRAN". At the top right, there is a "Bloquer..." button and a colorful pi symbol. The main content area is titled "La méthode de BUFFON approximation de Pi". Below the title is a large rectangular area containing a grid of horizontal lines and numerous small, colorful line segments representing needles scattered across the grid. Below the grid, the text "258 aiguilles" is displayed. Underneath that, the text "Approximation de Pi 3.10656231186032" is shown. At the bottom of the window, there are two circular buttons: a pause button and a play button, followed by a "Recommencer" button. At the very bottom, the copyright notice "© http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/" is visible.

http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/buffon.htm

La méthode de Monte Carlo

Principe :

On tire des points au hasard dans un cadre (carré un rectangle) et on compte ceux qui tombent dans un domaine (géographe pour le calcul de l'aire d'un lac ...)

Notions travaillées :

- calcul de probabilité
- simulation et algorithmique (répétition, condition)
- calcul dans le repère (distance à un point)

La méthode de Monte Carlo

Dans le carré $[0,2] \times [0,2]$, on trace un cercle de centre $(1,1)$ et de rayon 1.

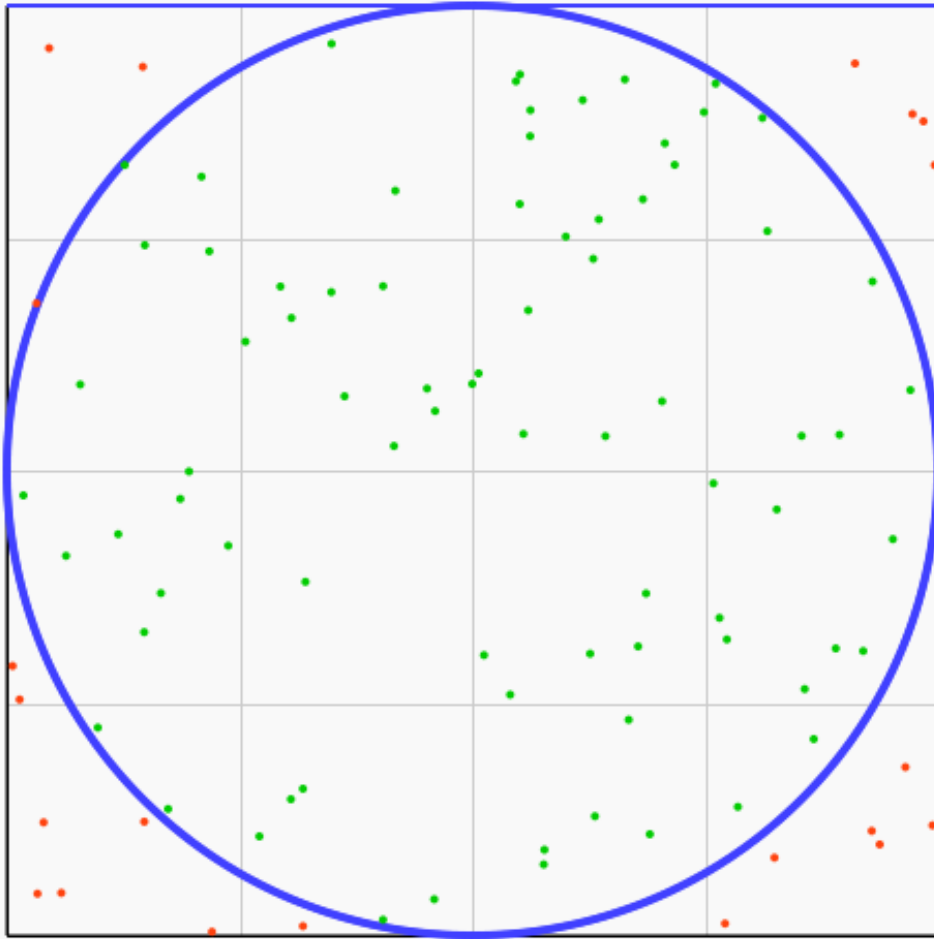
Lorsqu'on tire un point au hasard dans le carré, sa probabilité d'être dans le disque est

$$p = \text{aire du disque} / \text{aire du carré} = \pi/4$$

La loi des grands nombres dit que le nombre de points à l'intérieur du disque / Nombre d'essai tend vers $\pi/4$...

Remarque : algobox ne connaît pas le cercle

La méthode de Monte Carlo



Console

```
***Algorithme lancé***  
Combien d'essais ?  
Entrer N : 100  
L'approximation de Pi vaut 3.16  
  
***Algorithme terminé***|
```

- Poèmes :

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages,

3, 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5

Immortel Archimède, artiste ingénieur

8 9 7 9

Qui de ton jugement peut priser la valeur

3 2 3 8 4 6 2 6

Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.....

4 3 3 8 3 2 7 9

- Poèmes en anglais (<http://trucsmaths.free.fr/Pi.htm>):

How I wish I could recollect of circle round

3, 1 4 1 5 9 2 6 5

The exact relation Archimede unwound.

3 5 8 9 7

May I have a large container of coffee

3, 1 4 1 5 9 2 6

- Existe aussi en allemand, en espagnol, portugais, breton ...

<http://trucsmaths.free.fr/Pi.htm#poeme>

- Le chinois Lu Chao a récité en 2005 les 67 890 premières décimales en 24h. (un an pour les apprendre, 100 000)

La méthode d'Archimède

Le principe est d'encadrer le cercle par des polygones réguliers intérieur et extérieur dont on calcule le périmètre.

On choisit un cercle de rayon 1 unité.

$$\text{Périmètre intérieur} < 2\pi < \text{périmètre extérieur}$$

Notions travaillées :

géométrie des polygones réguliers : triangle, carré, hexagone

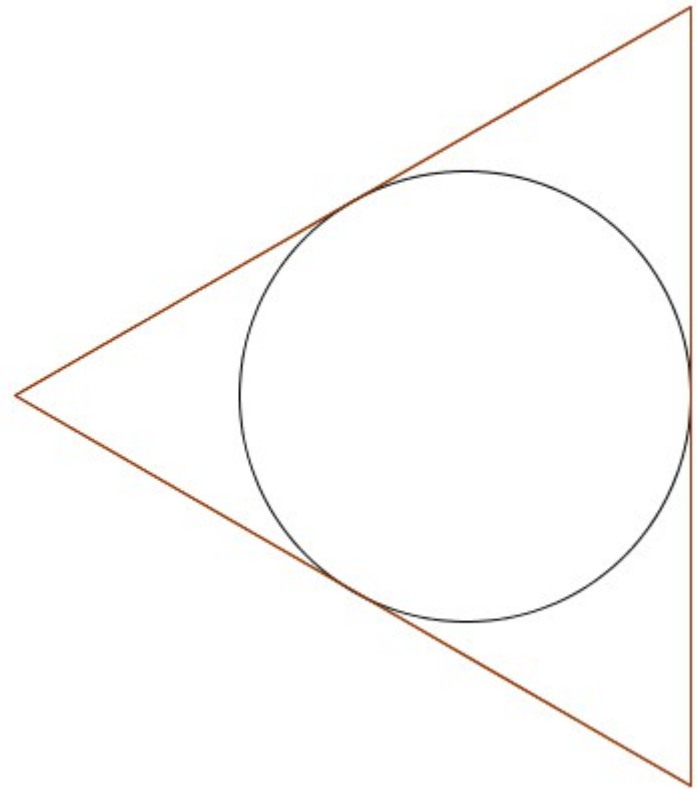
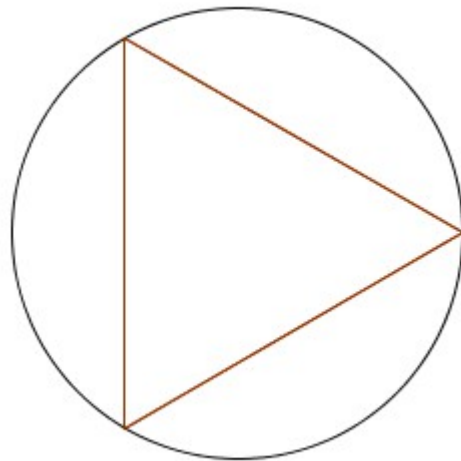
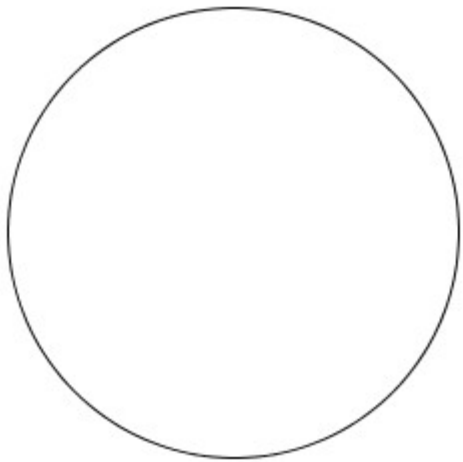
théorème de Pythagore

encadrement d'une racine carrée

$a < b$ et $b < c$ alors $a < c$

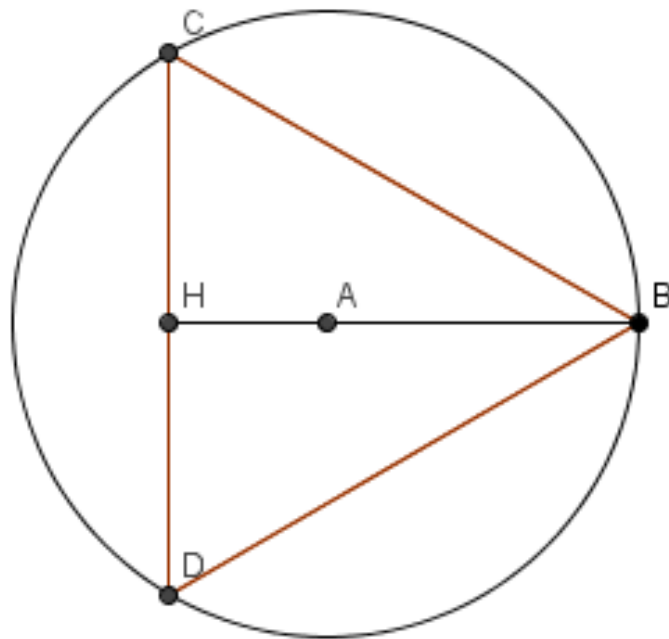
La méthode d'Archimède

Avec le triangle c'est mauvais et compliqué...



La méthode d'Archimède

Avec le triangle c'est mauvais et compliqué



Triangle intérieur

Triangle équilatéral, la médiane est à $\frac{2}{3}$ du centre de gravité.

$AB = \frac{2}{3} BH$ donc $BH = \frac{3}{2} AB = \frac{3}{2}$

H est le milieu de [CD]

Théorème de Pythagore : $CB^2 = CH^2 + AH^2$

$\frac{3}{4} CB^2 = \frac{9}{4}$ donc $CB = \text{rac}(3)$

Le périmètre vaut $3\text{rac}(3)$

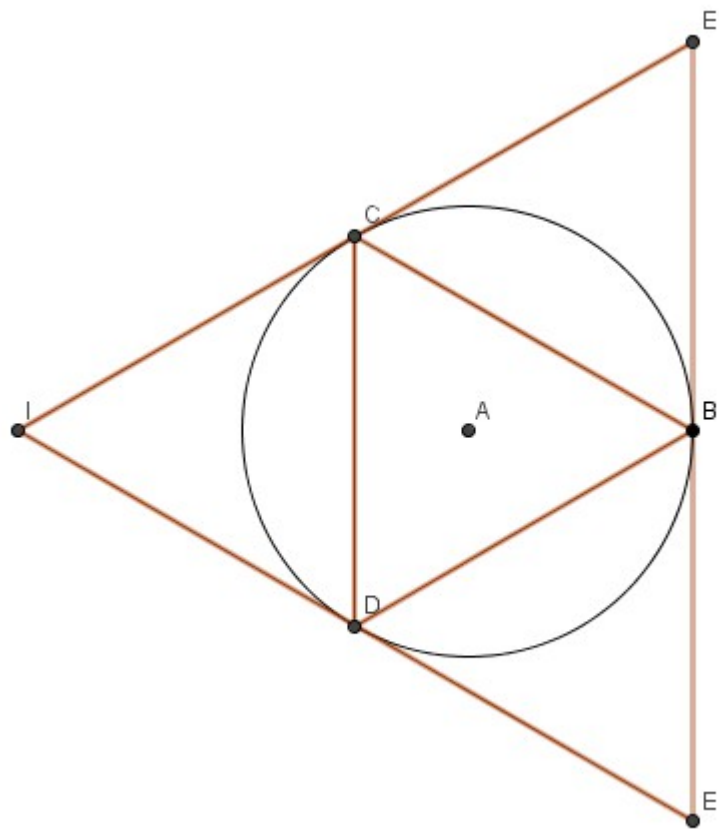
$289 < 300 < 324$ donc $1,7 < \text{rac}(3) < 1,8$

$5,1 < 3 \text{rac}(3) < 2\pi$

$2,55 < \pi$

La méthode d'Archimède

Avec le triangle c'est mauvais et compliqué



Triangle extérieur

Thalès ou la droite des milieux donne :
Coté extérieur = 2 coté du triangle intérieur

Donc le périmètre est $6\sqrt{3}$

$289 < 300 < 324$ donc $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$

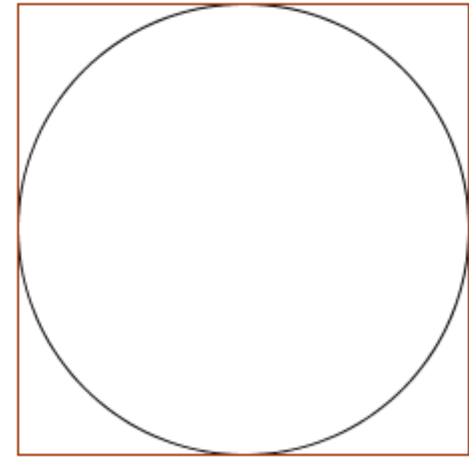
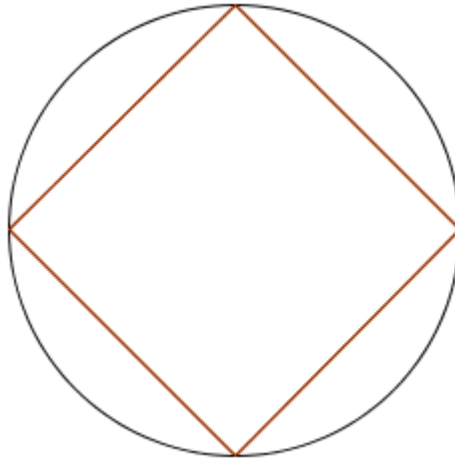
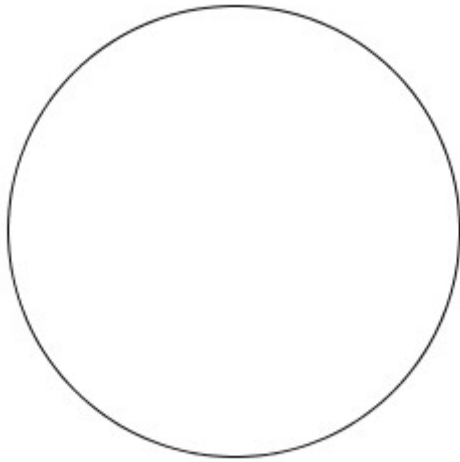
$2\pi < 6\sqrt{3} < 10,8$

$\pi < 5,4$

$2,55 < \pi < 5,4$

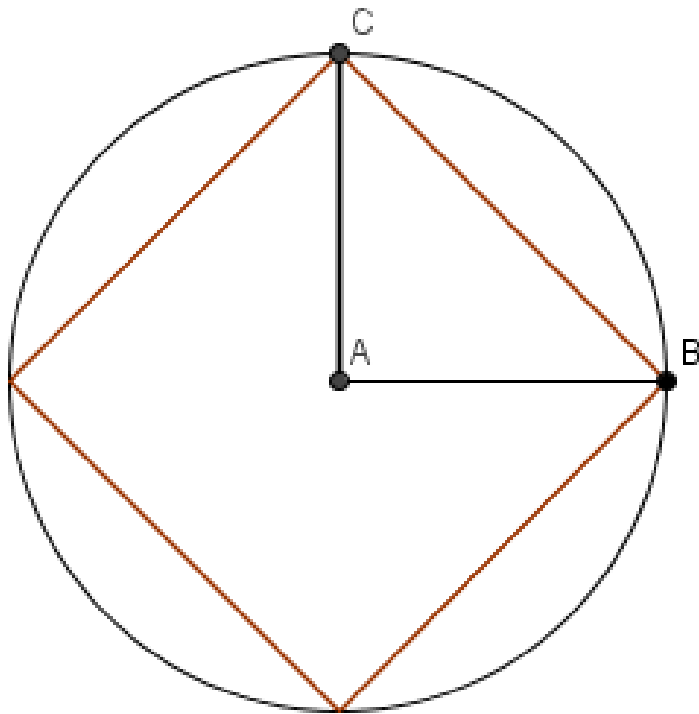
La méthode d'Archimède

Avec le carré, c'est un peu mieux et plus facile (?)



La méthode d'Archimède

Avec le carré, c'est un peu mieux et plus facile (?)



Carré intérieur

ABC triangle rectangle isocèle
Théorème de Pythagore donne
 $AB^2 + AC^2 = BC^2$ donc $BC = \text{rac}(2)$

Le périmètre vaut $4 \text{ rac}(2)$

$196 < 200 < 225$ donc $1,4 < \text{rac}(2) < 1,5$

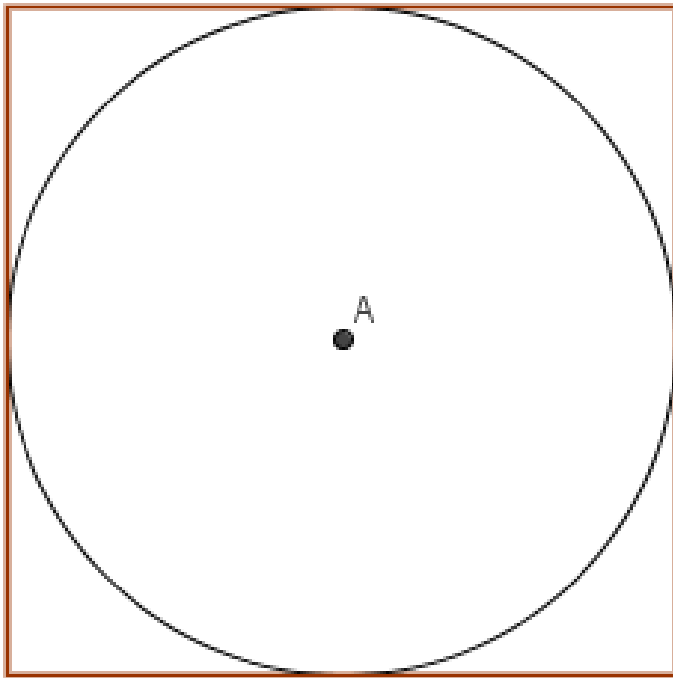
$$5,6 < 4 \text{ rac}(2)$$

$$5,6 < 2\pi$$

$$2,8 < \pi$$

La méthode d'Archimède

Avec le carré, c'est un peu mieux et plus facile (?)



Le carré extérieur

Son périmètre est 4 diamètres

Le périmètre vaut 8.

Donc $2\pi < 8$

soit $\pi < 4$

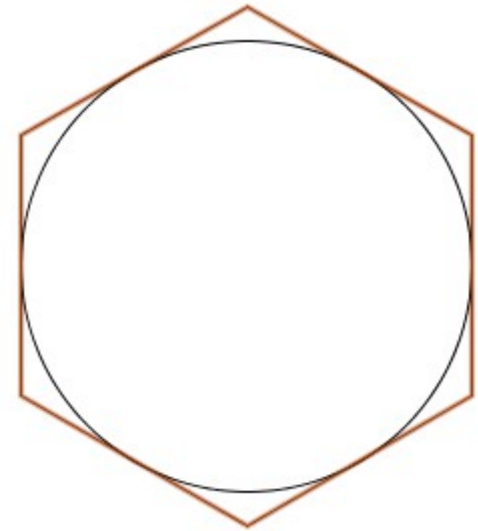
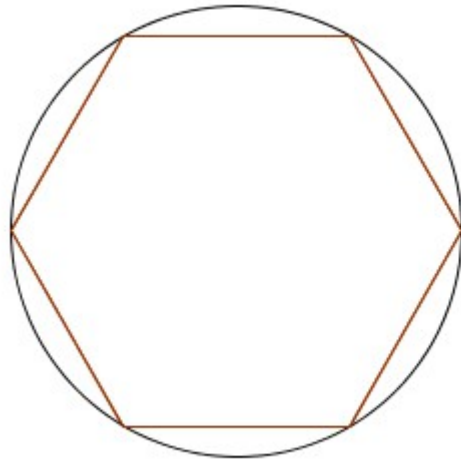
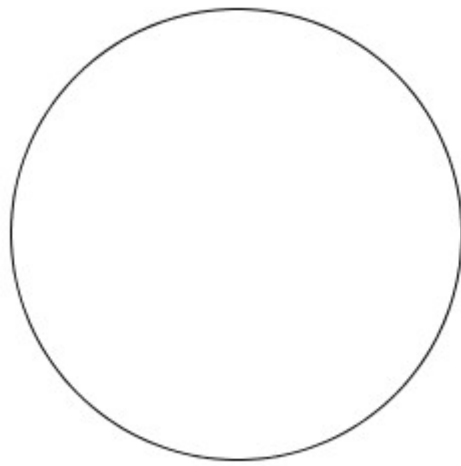
$$2,8 < \pi < 4$$

La méthode d'Archimède

Avec le pentagone ...

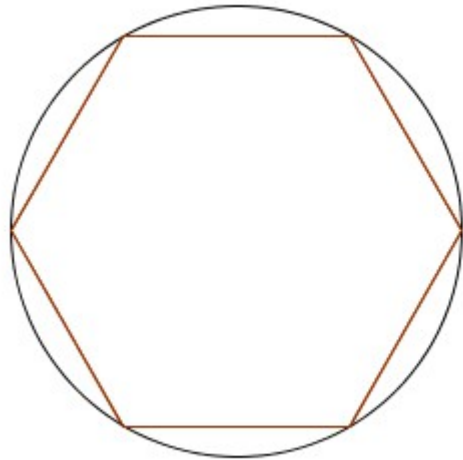
La méthode d'Archimède

Avec l'hexagone, c'est facile et « efficace »



La méthode d'Archimède

Hexagone intérieur



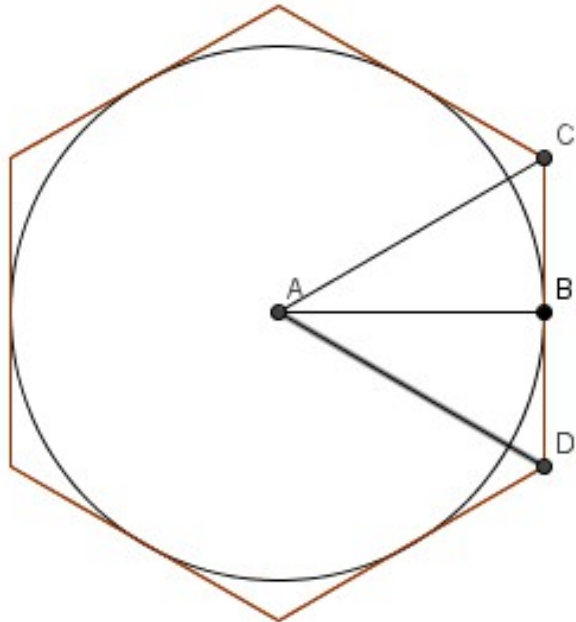
Le périmètre vaut 6

donc $6 < 2\pi$

donc $3 < \pi$

La méthode d'Archimède

Hexagone extérieur



$AB = 1$, B est le milieu de $[CD]$.

Le théorème de Pythagore :

$$AB^2 + CB^2 = AC^2 \text{ donc } 1 = \frac{3}{4} AC^2$$

$$AC = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ABC est équilatéral donc le périmètre est
 $12 \frac{\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$

$$289 < 300 < 324 \text{ donc } 1,7 < \sqrt{3} < 1,8$$

$$4\sqrt{3} < 7,2$$

$$2\pi < 7,2$$

$$\pi < 3,6$$

$$3 < \pi < 3,6$$

La méthode d'Archimède

En utilisant un polygone à 96 côtés, Archimède parvient à

$$3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7$$

$$\text{soit } 3,1408 < \pi < 3,1428$$

Proportionnalité du diamètre et de la circonférence d'un cercle

Idée : demander aux élèves d'apporter des objets circulaires (ronds) et tracer un repère orthonormal au tableau.

Pour chaque objet, en le posant sur l'axe des abscisses « mesurer » le diamètre et le marquer.

A partir de ce point, faire une marque sur le périmètre du cercle (sur l'objet) puis le faire rouler en vertical jusqu'à parcourir la circonférence et placer le point (on peut suivre l'axe des ordonnées et placer le point en dernier)

Proportionnalité du diamètre et de la circonférence d'un cercle

Tous les points seront alignés et ... 1 aura pour image π

Notions travaillées :

lien linéarité-proportionnalité, alignement des points dans un repère ...

repérage (lecture des points, tableau de proportionnalité)

Les guirlandes de π

Pour vous reposer ... et décorer votre salle, le foyer....

- Choisir une couleur par chiffre (0 noir, 1 bleu, 2 vert, 3 jaune, 4 rouge, 5 orange ...)
- Couper des carrés/triangles aux couleurs nécessaires
- Les accrocher sur un fil (agrafe, colle) dans le bon ordre
- Faire la guirlande la plus longue possible ...
jaune, bleu, rouge, bleu, orange ...

What Pi sound like ?

Principe de la guirlande mais en musique (les anglosaxon utilisent des lettres A, B, C.. pour les notes).

https://www.youtube.com/watch?v=YOQb_mtkEEE