

(D) Autres réponses et compléments

(D1) Jean-Claude LABLANQUIE propose une méthode relativement proche de celle exposée dans la première solution, basée sur une comparaison entre série et intégrale.

(D2) La troisième solution a également été proposée par Pierre RENFER, sous une forme un peu plus courte. Par ailleurs, Pierre RENFER remarque qu'en admettant la

convergence de la suite $\left(\frac{G_{n+1}}{G_n}\right)_{n \geq 0}$ vers un réel $a > 0$, on peut astucieusement

conclure. En effet, si $(x_n)_{n \geq 1}$ est une suite de nombres réels strictement positifs qui converge vers un réel $a > 0$, le lemme de Césaro appliqué à $(\ln(x_{n+1}) - \ln(x_n))_{n \geq 1}$

assure la convergence de $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n \geq 1}$ vers a . L'exemple fréquent est celui de la suite

$\left(\frac{n^n}{n!}\right)_{n \geq 1}$ qui donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}\right) = e$. Avec la relation (7), on établit alors

$$\frac{G_{n+1}}{G_n} = \sqrt[n+2]{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}} P_n^{\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}} = \sqrt[n+2]{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}} \left(\sqrt[n]{G_n}\right)^{\frac{-n^2}{(n+1)(n+2)}}.$$

Par passage à la limite, on obtient $a = e a^{-1}$ donc $a = \sqrt{e}$.

(D3) Franck GAUTIER signale l'équivalent $G_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{e}{2\pi n}}$, ce qui donne

immédiatement la réponse. L'égalité $\ln(P_n) = 2 \sum_{j=1}^n j \ln(j) - (n+1) \sum_{j=1}^n \ln(j)$ et les

développements asymptotiques donnés ci-dessous (D5) permettent de retrouver ce résultat.

(D4) Suite au problème posé, Robert FERRÉOL s'intéresse au comportement quand n tend vers $+\infty$ de $u_n = \prod_{k=1}^n k!$, expression qu'il appelle *surfactorielle* de n . Des calculs en Maple le conduisent à proposer l'équivalent

$$\prod_{k=1}^n k! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K \left(\frac{\sqrt{n}}{e^{\frac{3}{4}}} \right)^{n^2} \left(\frac{\sqrt{2\pi n}}{e} \right)^n n^{\frac{5}{12}}, \quad (10)$$

où $K \approx 2.124\,459\,441$. On revient dans le commentaire suivant sur cet équivalent.

En réalité, la quantité $\text{sf}(n) = \prod_{k=1}^n k!$ a été introduite en 1995 par Neil Sloane et Simon Plouff et est appelée *superfactorielle* de n . Elle se note $\text{sf}(n)$.

(D5) On peut obtenir le développement asymptotique de $\ln(u_n)$ (équation (6)) par la formule d'Euler-Maclaurin. On rappelle que $u_n = \prod_{k=1}^n k!$ Donc

$$\ln(u_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \ln(j) = \sum_{j=1}^n (n+1-j) \ln(j) = (n+1) \ln(n!) - \sum_{k=1}^n k \ln(k). \quad (11)$$

D'après la formule de Stirling,

$$\ln(n!) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \ln(n) - n + \frac{1}{2} \ln(n) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (12)$$

En posant $f(t) = t \ln(t)$ pour $t > 0$, la formule d'Euler Maclaurin donne pour n dans \mathbb{N}^* ,

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(t) dt + \frac{1}{2}(f(n) - f(1)) + \frac{1}{12}(f'(n) - f'(1)) + \frac{1}{6} \int_1^n b_3(\{t\}) f'''(t) dt,$$

où $\{t\}$ désigne la partie fractionnaire de t et $b_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$. Tous calculs faits et puisque $t \mapsto b_3(\{t\})$ est bornée sur \mathbb{R} ,

$$\sum_{k=2}^n k \ln(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2} n^2 \ln(n) - \frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{2} n \ln(n) + \frac{1}{12} \ln(n) + O(1). \quad (13)$$

En reportant (12) et (13) dans l'égalité (11), on trouve

$$\ln(u_n)_{n \rightarrow +\infty} = \frac{1}{2}n^2 \ln(n) - \frac{3}{4}n^2 + n \ln(n) + \ln\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{e}\right)n + \frac{5}{12}\ln(n) + O(1), \quad (14)$$

ce qui donne le développement voulu. D'après Maple, le terme $O(1)$ dans la relation(14) est donné par

$$\frac{1}{2}\ln(2\pi) + \zeta'(-1) + o(1),$$

ce qui revient à dire que le terme $O(1)$ dans le développement (13) de $\sum_{k=2}^n k \ln(k)$ serait

$$\frac{1}{12} - \zeta'(-1) + o(1).$$

En prenant l'exponentielle dans le développement asymptotique (14), la constante K

dans l'équivalent (10) de $\prod_{k=1}^n k!$ serait donc $\sqrt{2\pi} \exp(\zeta'(-1)) \approx 2.124\ 459\ 441$.