# À propos de la page 357 du bulletin 446 (énoncé page 356)

La double répétition de la première figure de cette page m'a incité à une lecture plus attentive du compte-rendu de ce troisième exemple. Elle commence en bas de la page 356 par l'énoncé d'un très intéressant exercice proposé par l'Irem de Lyon et dont le traitement qui en a été fait en classe apparaît très bien dans son résumé fait au début de la page 357.

Mes réflexions ne portent que sur ce qui suit cette affirmation inattendue : « On peut donc généraliser ». Il s'agit du traitement de l'énoncé implicite, rattaché â la figure 1 ci-contre (figure de la page 356) :

Soit un rectangle ABCD de longueur :

$$AB = CD = L$$

et de largeur :

$$AD = BC = \ell.$$

Les points M, N, P, Q situés respectivement sur les segments AB, BC, CD, DA vérifient :

$$AM = BN = CP = DQ = x$$

(donc $0 < x < \ell$). La symétrie centrale du rectangle met en évidence que MNPQ est un parallélogramme

Pour quelle valeur de $x$ l'aire $f(x)$ du parallélogramme est-elle minimum ?

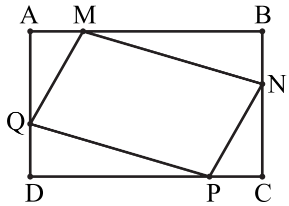

Figure 1

Voici mes remarques et ce que je propose:

1. Le théorème invoqué pour conclure : « Un rectangle de périmètre fixe est d'aire maximale quand il est carré » doit être complété par « ou de la plus grande largeur possible ».

2. Il n'était pas nécessaire de distinguer les deux cas $x < 1/2$ et $x > 1/2$ pour être amené à appliquer le théorème cité au-dessus. La figure de la page 356 (figure 1, qui a très probablement servi en classe pour calculer $f(x)$ = aire ABCD − (somme des aires des quatre triangles rectangles deux â deux identiques et extérieurs au parallélogramme)) et la figure 2 (celle qu'on trouve en trois exemplaires

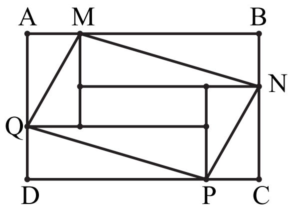

Figure 2

page 357) ou la figure 3 (dernière figure de la page 357) montrent que l'aire à déduire du rectangle est la moitié de la somme des aires des rectangles de dimension commune $x$ et de diagonales respectives MQ, NP, MN, PQ. On peut les regrouper pour former le rectangle de la figure 4 dont les dimensions sont $2x$ et $(L + \ell - 2x)$ . Il a un périmètre fixe $2(L + \ell)$ et une aire égale à $2x(L + \ell - 2x)$.

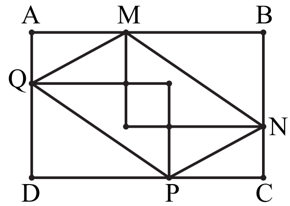


Figure 3

On en déduit que $f(x) = L\ell - x(L + \ell - 2x)$ et que $f(x)$ est minimum quand le rectangle R de la figure 4 est d'aire maximum. Et on en arrive à l'application du théorème cité :

Ou bien R peut être carré, ce qui équivaut â $2x = L + \ell - 2x$, soit $x = (L + \ell)/4$, valeur qui n'est acceptable que si $(L + \ell)/4 < \ell$ soit $L < 3\ell$.

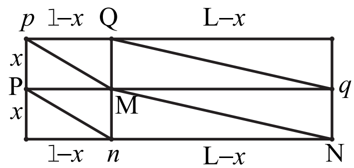


Figure 4

Ou bien $L > 3\ell$ : dans ce cas

$$(L + \ell - 2x) - 2x > 4(\ell - x) > 0.$$

$2x$ reste donc la largeur de R et son maximum est pour $x = \ell$ (figure 5).

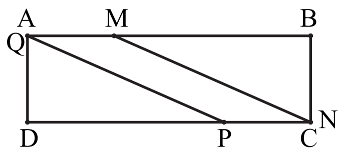


Figure 5

En résumé :

si $L < 3\ell$, le maximum de $f(x)$ est atteint pour $x = (L + \ell)/4$ et vaut : $L\ell - (L + \ell)^2/8$.

si $L > 3\ell$, le maximum de $f(x)$ est atteint pour $x = \ell$ et vaut : $\ell^2$.

3. Lorsque j'étais en activité, j'avais toujours une classe de seconde et je me suis toujours appliqué à entraîner les élèves à mettre les trinômes du second degré (â coefficients numériques) sous forme canonique à l'aide de l'identité :

$$A^2 \pm 2AB = (A \pm B)^2 - B^2.$$

J'aurais alors fait rechercher le minimum de $f(x)$ dans l'exercice de l'Irem de Lyon à partir de :

$$f(x) = 2\left(\frac{15}{4} - x\right)^2 + \frac{207}{8}.$$

Mais j'aurais ensuite reproposé l'exercice avec AB = 24 et AD = 6 qui nous aurait conduits à :

$$f(x) = 2\left(\frac{15}{2} - x\right)^2 + \frac{63}{2}.$$

En demandant à chaque fois aux élèves de réaliser la figure correspondant au minimum de $f(x)$, ils auraient été amenés à bien tenir compte de $0 < x < \ell$ et à bien distinguer les deux cas dans la généralisation par la méthode géométrique.

*Une proposition d'extension en classe de Terminale S* (Figure 6).

On prend pour repère orthonormal D$x$ et D$y$. M, N, P, Q sont cette fois supposés décrire respectivement les demi-droites [AB), [BC), [CD), [D$y$), avec toujours

$$AM = BN = CP = DQ = x$$

et $x > 0$.

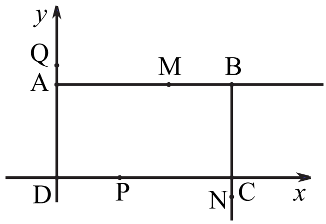

Figure 6

En coordonnées on a : A(0 ; $\ell$), B(L ; $\ell$), C(L ; 0), D(0 ; 0), M($x$ ; $\ell$), N(L ; $\ell - x$), P(L $- x$ ; 0) et Q(0 ; $x$). On en tire : $\overrightarrow{PQ}\,(x - L\,;x)$ et $\overrightarrow{PN}\,(x\,;\ell - x)$. On pose

$$V(x) = x^2 - (x - L)(\ell - x).$$

On a donc :

$$f(x) = \left\|\overrightarrow{PN} \wedge \overrightarrow{PQ}\right\| = \left|V(x)\right|$$

avec

$$V(x) = 2x^2 - (L + \ell) + L\ell.$$

V(x) est un trinôme ayant un minimum

$$m = \frac{8L\ell - (L + \ell)^2}{8}$$

pour $x = \dfrac{L + \ell}{4}$.

$$m = \frac{-L^2 + 6L\ell - \ell^2}{8} = \frac{P(L)}{8}.$$

P(L) est un trinôme en L de racines $\left(3 - 2\sqrt{2}\right)\ell$ et $\left(3 + 2\sqrt{2}\right)\ell$ dont, seule, la deuxième, est $> \ell$. Donc $m > 0$ si L $< \left(3 + 2\sqrt{2}\right)\ell$ et $m < 0$ si L $> \left(3 + 2\sqrt{2}\right)\ell$ .

En conséquence :

Si L $< \left(3 + 2\sqrt{2}\right)\ell$, $f(x)$ est minimum pour $x = \dfrac{L + \ell}{4}$.

Si L $> \left(3 + 2\sqrt{2}\right)\ell$, V($x$) a deux racines $U_1 = \dfrac{L + \ell - \sqrt{(L - 3\ell)^2 - 8\ell^2}}{4}$ et $U_2 = \dfrac{L + \ell + \sqrt{(L - 3\ell)^2 - 8\ell^2}}{4}$, toutes deux supérieures à $\ell$. On en conclut que $f(x)$ a un minimum nul qui est atteint pour $x = U_1$ ou $x = U_2$, ce qui correspond à chaque fois à l'alignement des quatre points M, N, P, Q.

M. MARCADÉ