SOLUTION

Ce problème s'inscrit naturellement dans la théorie que j'ai baptisée « la complexité des triangles », amorcée il y a plusieurs années avec l'énoncé 245 de la présente rubrique (problème d'Euler), mais qui a sensiblement progressé depuis : il s'agit d'une étude purement algébrique des triangles dans le repère complexe où O et H ont pour affixes 0 et 1 respectivement.

Si α, β, γ sont les affixes de A, B, C avec $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = \mathrm{R}$, et si l'on pose $w = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{\mathrm{R}^2}$, on a $|w| = \mathrm{R}$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et $w\overline{\alpha} = \beta\gamma$ donc

$$w = w\left(\overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma}\right) = \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta.$$

Le fait que les centres I des cercles inscrits (algébriquement, il n'y a pas lieu de distinguer cercle inscrit et cercles exinscrits) aient leurs milieux sur Γ, cercle circonscrit à ABC et cercle d'Euler du quadrangle formé par les points I, au milieu des arcs BC, CA et AB, revient à dire que l'affixe u de l'un quelconque de ces quatre points I peut s'écrire : $u = \alpha' + \beta' + \gamma'$, avec $\alpha'^2 = \beta\gamma$, $\beta'^2 = \gamma\alpha$, $\gamma'^2 = \alpha\beta$ et $\alpha'\beta'\gamma' = -\,w\mathrm{R}^2$. Par ailleurs, le centre de gravité G étant intérieur à Γ, $\mathrm{R} > \dfrac{1}{3}$, et compte tenu de la formule d'Euler (qu'on peut retrouver algébriquement) :

$$u\overline{u} = \mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}r$$

(r est négatif pour les cercles exinscrits), $|u| < \mathrm{R} - r$, donc $|1 + u| < 4\mathrm{R} - r$.

Or $1 + u$ est l'affixe de H′I : si $r > 0$, ce premier résultat prouve que le cercle de centre I et de rayon r est intérieur au cercle Γ', de centre H′ et de rayon 4R. D'ailleurs, par le même raisonnement, le cercle circonscrit Γ est lui aussi intérieur à Γ'. Mais pour résoudre notre problème dans le cas des cercles exinscrits ($r < 0$), il faut encore prouver que : $|1 + u| < 4\mathrm{R} + r$. Et par cette méthode, c'est immédiat, car :

$$1 + u = 1 + \alpha' + \beta' + \gamma' \;;$$

comme $w = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2$ et $w\overline{\alpha'} = -\beta'\gamma'$, …, on a :

$$\begin{aligned}2\mathrm{R}\cdot\mathrm{H'I} &= \left|2w\left(1+\overline{\alpha'}+\overline{\beta'}+\overline{\gamma'}\right)\right|\\ &= \left|(\beta'-\gamma')^2+(\gamma'-\alpha')^2+(\alpha'-\beta')^2\right|\\ &\le \left|\beta'-\gamma'\right|^2+\left|\gamma'-\alpha'\right|^2+\left|\alpha'-\beta'\right|^2\\ &= 9\mathrm{R}^2-\left|\alpha'+\beta'+\gamma'\right|^2 = 8\mathrm{R}^2+2\mathrm{R}r.\end{aligned}$$

Il en résulte bien que $\mathrm{H'I} \le 4\mathrm{R} + r$, l'égalité n'étant vérifiée que si les cordes $(\beta' - \gamma')$, $(\gamma' - \alpha')$ et $(\alpha' - \beta')$ sont colinéaires, donc si le triangle est dégénéré.

Bien évidemment, ce problème pouvait aussi être abordé par des méthodes traditionnelles. J'ai reçu des réponses de Jacques BOROWCZYK (37-Tours), Jacques BOUTELOUP (76-Rouen), Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), Philippe DELEHAM (en 2001 : 24-Périgueux), Edgard DELPLANCHE (94-Créteil), Georges LION (98-Nouméa) et René MANZONI (76-Le Havre).

Que ce soit par la formule d'Al Kashi ou par les relations :

$$\mathrm{I_AH^2 + I_AH'^2 = 2I_AO^2 + 2OH^2},$$
$$\mathrm{I_AH^2 + I_AO^2 = 2I_AO'^2 + 2O'H^2},$$

(O′ milieu de OH et centre du cercle d'Euler de ABC), on obtient facilement :

$$\mathrm{H'I_A}^2 = 3\mathrm{OI_A}^2 - 2\mathrm{O'I_A}^2 + \frac{3}{2}\mathrm{OH}^2.$$

Or

$$\mathrm{OI_A}^2 = \mathrm{R}^2 + 2\mathrm{R}r_\mathrm{A},$$

$$\mathrm{O'I_A} = \frac{\mathrm{R}}{2} + r_\mathrm{A}$$

et

$$\mathrm{OH}^2 = 9\mathrm{R}^2 - (a^2 + b^2 + c^2),$$

mais l'astuce d'Edgard Delplanche est d'utiliser en outre :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(p - a)^2 + 8\mathrm{R}r_\mathrm{A} - 2r_\mathrm{A}^2,$$

– qui provient de : $\mathrm{R} - r_\mathrm{A} = \mathrm{R}(\cos\hat{\mathrm{A}} - \cos\hat{\mathrm{B}} - \cos\hat{\mathrm{C}})$, donc

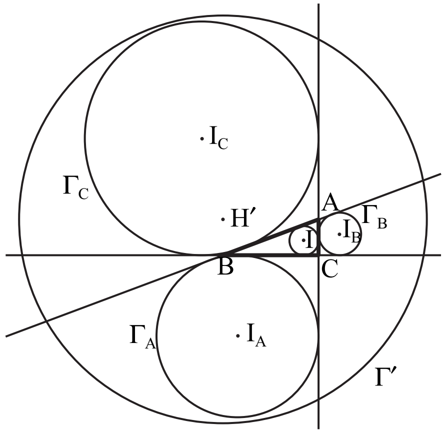
$$(p-a)^2 - (\mathrm{R} - r_\mathrm{A})^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} - 3\mathrm{R}^2 + 2\mathrm{R}(\mathrm{R} - r_\mathrm{A}) \text{ –},$$

ce qui donne :

$$\mathrm{H'I_A}^2 = (4\mathrm{R} - r_\mathrm{A})^2 - 3(p - a)^2.$$

René Manzoni, quant à lui, choisit de fixer les cercles Γ (O, R), et Γ_A ($\mathrm{I_A}$, r_A) : si $\mathrm{OI_A}^2 = \mathrm{R}^2 + 2\mathrm{R}r_\mathrm{A}$, il existe une infinité de triangles inscrits dans Γ et exinscrits à Γ_A. H′ parcourt alors un arc de cercle, et il reste à calculer $\sup(\mathrm{H'I_A})$ sur cet arc de cercle.

La question « Peut-on améliorer ce résultat ? » peut s'interpréter diversement. Jacques Bouteloup montre, en faisant tendre le triangle vers un triangle dégénéré (R étant fixé), que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des triangles tels que le cercle de centre H′ et de rayon $4\mathrm{R} - \varepsilon$ ne contienne pas tous les cercles exinscrits. Mais quand ε tend vers 0, le rayon r du cercle inscrit tend lui aussi vers 0, donc cela ne prouve pas que les cercles exinscrits ne sont pas intérieurs au cercle de centre H′ et de rayon $4R - r$ (comme c'est le cas si le triangle est équilatéral), ou $4R - kr$ pour une constante k donnée, ce qui serait une amélioration du résultat. En outre, rien ne prouve que H′ soit le meilleur centre, le plus petit cercle contenant les trois cercles exinscrits pourrait avoir un rayon $4R - kr$ et un centre autre que H′.



Prenons l'exemple d'un triangle rectangle, en donnant à A, B, C les coordonnées : $(0, 2t)$, $(1 - t^2, 0)$ et $(0, 0)$ pour t infiniment grand. Les cercles exinscrits Γ_A, Γ_B, Γ_C étant tangents aux axes de coordonnées, et la distance d'un sommet aux points de contact étant le demi-périmètre du triangle : $p = t^2 + t$, il est facile de déterminer les trois centres I_A $(t - t^2, t - t^2)$, I_B $(t + 1, t + 1)$ et I_C $(- t - t^2, t + t^2)$ et les trois rayons : $r_A = t^2 - t$, $r_B = t + 1$ et $r_C = t^2 + t$. Tout cercle contenant Γ_A et Γ_C a un rayon $R' \geq \frac{r_A + r_C + I_AI_C}{2}$, car si Ω est son centre, $R' \geq \Omega I_A + r_A$ et $R' \geq \Omega I_C + r_C$, donc $R' \geq \frac{r_A + r_C + \Omega I_A + \Omega I_C}{2}$, l'inégalité triangulaire permettant de conclure. Or $\frac{r_A + r_C + I_AI_C}{2} > 2t^2 = 4R - 2$, alors que $r = t - 1$ tend vers l'infini. Donc, quel que soit le centre, il est impossible, dans le cas général, de majorer le rayon du plus petit cercle contenant tous les cercles exinscrits par un terme du type $4R - kr$, k étant une constante aussi petite soit elle. Par contre, comme le montre Marie-Laure Chaillout, le plus petit cercle de centre H′ contenant les trois cercles exinscrits a un rayon inférieur ou égal à $\sqrt{16R^2 - 3r^2}$, ce qui est déjà une amélioration.

Jacques Borowczyk s'intéresse essentiellement au cercle Γ″, tangent intérieurement à Γ_A, Γ_B et Γ_C. Il existe un point S, le point de Spieker, de coordonnées barycentriques $(b + c, c + a, a + b)$, ayant même puissance : $\frac{r^2 + p^2}{4}$ par rapport à ces trois cercles. L'inversion de centre S laissant Γ_A, Γ_B et Γ_C invariants transforme donc le cercle d'Euler de ABC en Γ″, de rayon $\frac{r^2 + p^2}{4r}$. Le problème est que, comme le montre l'exemple ci-dessus du triangle rectangle, ce rayon peut être infiniment supérieur à 4R, le plus petit cercle contenant les trois cercles exinscrits ne leur étant pas obligatoirement tangent. D'où la question : dans quel cas Γ″ est-il le cercle cherché ? Marie-Laure Chaillout détermine une condition nécessaire et suffisante : que le centre de Γ″ soit intérieur au triangle $I_AI_BI_C$.