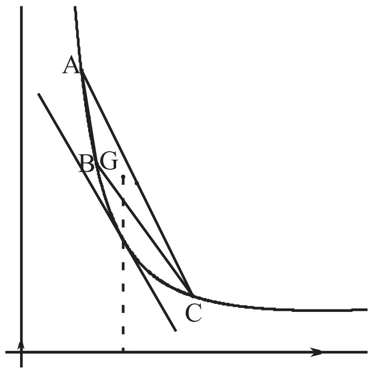
SOLUTION

Cet exercice assez classique de DEUG a suscité 25 réponses, de Aziz BARBACHE (El Hajeb, Maroc), Michel BATAILLE (76-Rouen), Richard BECZKOWSKI (71-Chalon s/Saône), François BONOMI (59-Lambersart), Pierre BORNSZTEIN (95-Pontoise), Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), Alain CORRE (03-Moulins), Jacques DAUTREVAUX (06-St André), Edgard DELPLANCHE (94-Créteil), Christine FENOGLIO (69-Lyon), Jean-Pierre FRIEDELMEYER (68-Osenbach), Michel HEBRAUD (31-Toulouse), Guy HUVENT (59-Hem), Georges LION (98-Nouméa), René MANZONI (76-Le Havre), Charles NOTARI (31-Montaut), Moubinool OMARJEE (75-Paris), Abderrahim OUARDINI (06-Nice), Denis PEPIN (55-Verdun), Maurice PERROT (75-Paris), Raymond RAYNAUD (04-Digne), Pierre RENFER (67-Ostwald), Philippe ROGEON (86-Buxerolles), Pierre SAMUEL (40-Hossegor) et VIDIANI (71-St Jean de Trézy).

C'est en fait une application immédiate de la notion de convexité. La fonction $f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ étant convexe (de dérivée seconde positive) sur]0, 1] (et même au delà), l'inégalité de Jensen permet d'écrire, quels que soient a, b, c appartenant à]0, 1] :

$$\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3}\geq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right),$$

soit $\frac{100}{9}$ si $a+b+c=1$. Michel Hébraud nous renvoie à l'ouvrage *Inequalities* de Hardy, Littlewood et Polya (Cambridge), mais le fait que si $f'(x)$ est croissante, la courbe est au dessus de sa tangente :



La notion de convexité : La courbe est au-dessus de ses tangentes, donc le centre de gravité G est au-dessus de la courbe.

$$f(x)\geq f\left(\frac{1}{3}\right)+\left(x-\frac{1}{3}\right)f'\left(\frac{1}{3}\right)$$

est amplement suffisant. Le résultat est donc facilement généralisable à une somme de n termes (et même pour $n=1$, précisent plusieurs lecteurs) :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)^2 \geq n\left(\frac{1}{n}+n\right)^2=\frac{(n^2+1)^2}{n}.$$

Si l'on ne veut pas faire appel à la convexité – « en pleine deshérence » selon Georges Lion, mais quand-même utilisée par plus du tiers des lecteurs – et qu'on souhaite éviter les développements trop calculatoires, on peut se contenter de la relation :

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$$

qui se démontre par exemple ainsi :

$$(a+b+c)^2+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=3(a^2+b^2+c^2).$$

Elle entraîne :

$$\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{1}{3}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right]^2$$

or

$$(a+b+c)\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right]=9+\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ca} \geq 9.$$

On peut aussi minorer la moyenne arithmétique par la moyenne géométrique :

$$\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2\right] \geq \frac{1}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} \geq 9$$

vu que :

$$\frac{1}{3}(a+b+c)=\frac{1}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Plusieurs lecteurs se servent de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, voire de l'inégalité du réordonnement (fort utile dans les compétitions mathématiques) : toutes deux permettent d'écrire :

$$\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=\frac{a+b+c}{abc}.$$

On peut également rechercher le minimum d'une fonction. Si l'on fixe l'un des termes, on montre que la somme des deux autres est minimale lorsque ceux-ci sont égaux – il suffit de dériver : $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(k-x+\frac{1}{k-x}\right)^2$ –. Cette méthode s'applique au cas de n nombres : si deux d'entre eux sont distincts, la somme ne peut pas être minimale ; donc tous sont égaux. Près d'un quart des lecteurs utilisent les fonctions de plusieurs variables : en posant $c = 1 - a - b$,

$$f(a,b)=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(1-a-b+\frac{1}{1-a-b}\right)^2$$

atteint son minimum au point où les dérivées partielles sont nulles.

La généralisation peut également porter sur l'exposant. Marie-Laure Chaillout prouve que si la somme de p réels strictement positifs est fixe, égale à ε, pour tout réel $t \geq 1$, la somme des $\left(a_i+\dfrac{1}{a_i}\right)^t$ est minimale lorsque ces réels sont égaux. Si $0 < t < 1$, ce résultat reste vrai pour $0 < \varepsilon \leq 1$. Et Pierre Bornsztein obtient le même résultat pour la somme des $\left(a_i^\alpha+\dfrac{1}{a_i^\beta}\right)^t$ pour α, β et t réels, $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$ et $t \geq 1$, la somme des a_i étant égale à 1.

Signalons, pour l'anecdote, qu'en juin 1995, c'est un coup de téléphone d'Hassan Tarfaoui, alors professeur d'Emmanuel Breuillard, qui m'a incité à me préoccuper des Olympiades Internationales de Mathématiques et, par la suite, à participer à la fondation d'Animath. Emmanuel Breuillard, médaille d'or aux Olympiades Internationales 1995, vient de soutenir sa thèse en décembre 2003.