SOLUTION

Cette configuration est connue sous le nom « cercles de Soddy » (voir par exemple : *Dictionnaire des mathématiques* de Bouvier, Le Lionnais et George, *Dictionnaire Penguin des curiosités géométriques* de Wells, *Redécouvrons la géométrie* de Coxeter et Greitzer, *Nouveaux divertissements mathématiques* de Martin Gardener, …). « La relation (3), écrit l'auteur, est apparue sans démonstration, et sans considération de signe pour c_i, dans un petit article de *Science* *et Vie* de juillet 2001. Elle était attribuée aux Américains Wilks et Mallows en 1998. Il est évident que cette relation est indépendante de l'orientation de Ox (son changement multiplie les z_i par un facteur λ), mais son indépendance du choix de l'origine O est par contre loin d'être évidente. C'est en supposant réalisée cette propriété que j'ai été conduit aux deux autres relations ».

La relation (1), la plus connue, est attribuée à Descartes. Elle apparaît sans démonstration dans l'exercice 56 du Hors Série de *Tangente* sur la géométrie. Le présent énoncé vise donc à compléter ces multiples publications partielles. J'ai reçu des solutions de Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), Alain CORRE (03-Moulins), Christine FENOGLIO (69-Lyon), Georges LION (98-Wallis) et René MANZONI (76-Le Havre).

Tout d'abord, si les quatre cercles ne sont pas tangents extérieurement deux à deux, on peut supposer que (Γ_2) est intérieur à (Γ_1), auquel cas (Γ_3) et (Γ_4) ne peuvent être ni extérieurs à (Γ_1), ni intérieurs à (Γ_2) : ils sont tous deux intérieurs à (Γ_1) et extérieurs à (Γ_2) et – en faisant le même raisonnement avec (Γ_1) et (Γ_3) – extérieurs entre eux.

Pour la deuxième question, avec plus ou moins de calculs, les lecteurs utilisent l'inversion. Considérons un repère complexe dont le centre O est l'un des six points de contact (par exemple, le point de contact de (Γ_1) et (Γ_2)) et dont l'axe des réels est tangent aux deux cercles (Γ_1) et (Γ_2). On identifiera désormais un point à son affixe. Les centres z_1 et z_2 de ces cercles sont des imaginaires purs de modules r_1 et r_2, et le choix des signes de c_1 et c_2 montre que, dans tous les cas, c_1z_1 et c_2z_2 sont opposés : on peut donc supposer que $c_1z_1 = \mathrm{i}$ et $c_2z_2 = -\mathrm{i}$. L'inversion de pôle O et de puissance 1 transforme ces deux cercles en deux droites horizontales (Δ_1) et (Δ_2), d'équations $\mathrm{Im}(z) = \frac{c_1\,\mathrm{i}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = -\frac{c_2\,\mathrm{i}}{2}$.

Cette même inversion transforme un cercle (Γ) ne passant pas par O, de centre z et de rayon r, en un cercle de centre $z' = \frac{z}{\mathrm{K}}$ et de rayon $r' = \left|\frac{r}{\mathrm{K}}\right|$, où $\mathrm{K} = |z|^2 - r^2$ est la puissance de O par rapport à (Γ). Si, conformément à l'énoncé, on pose $c = -\frac{1}{r}$ lorsque O est intérieur à (Γ) (donc $\mathrm{K} < 0$) et $c = \frac{1}{r}$ lorsque O est extérieur à (Γ), $r' = \frac{1}{\mathrm{K}c}$ et $z' = czr'$. (Γ_3) et (Γ_4) étant tangents à (Γ_1) et (Γ_2) et tangents entre eux, leurs inverses sont tangents aux deux horizontales (Δ_1) et (Δ_2), donc de même rayon : $r' = \frac{|c_1 + c_2|}{4}$, et ils sont tangents entre eux. Leurs centres c_3z_3r' et c_4z_4r' sont donc sur une même horizontale : $\mathrm{Im}(z) = \frac{(c_1 - c_2)\mathrm{i}}{4}$ et distants de $2r'$. En d'autres termes, il existe $Z = \dfrac{c_3z_3 + c_4z_4}{2}$ et $\varepsilon = \pm 1$ tels que $c_3z_3 = Z + \varepsilon$ et $c_4z_4 = Z - \varepsilon$.

Dans ce repère où $c_1z_1 = i$, $c_2z_2 = -i$, $c_3z_3 = Z + \varepsilon$ et $c_4z_4 = Z - \varepsilon$, il est clair que :

$$2\sum (c_iz_i)^2 = 4z^2 = \left(\sum c_iz_i\right)^2.$$

Cette relation étant homogène, elle reste vraie dans tout repère de centre O, donc en remplaçant z_i par λz_i pour tout complexe λ. Or ce même résultat vaut pour chacun des six points de contact des quatre cercles : plaçons en chacun de ces points un repère translaté de notre repère initial. Dans chacun de ces repères, les c_i sont inchangés et les z_i remplacés par $z_i + t$. Donc pour six valeurs de t on a :

$$2\sum (c_i(z_i + t))^2 = \left(\sum c_i(z_i + t)\right)^2.$$

En développant, on trouve un trinôme $\mathrm{A}t^2 + 2\mathrm{B}t + \mathrm{C}$, avec

$$\mathrm{A} = 2\sum c_i^2 - \left(\sum c_i\right)^2,$$

$$\mathrm{B} = 2\sum c_i^2 z_i - \left(\sum c_i\right)\left(\sum c_iz_i\right)$$

et

$$\mathrm{C} = 2\sum c_i^2 z_i^2 - \left(\sum c_iz_i\right)^2,$$

qui s'annule pour six valeurs distinctes de t, donc qui est identiquement nul. On en déduit que les relations (2) et (3) sont vraies dans tout repère complexe (c'est-à-dire en remplaçant z_i par $\lambda z_i + t$ pour tout λ et tout t, tout comme la relation (1), indépendante du repère.