SOLUTION

Pour ce problème partiellement combinatoire, partiellement géométrique, j'ai reçu des solutions de Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), René MANZONI (76-Le Havre) et Pierre SAMUEL (92-Bourg la Reine), qui diffèrent essentiellement dans l'argumentation géométrique.

Soit S un ensemble de n points. *Hypothèse* : pour toute partie de cinq points de S, quatre au moins sont cocycliques. *Conclusion* : au moins $n - 1$ points de S sont cocycliques.

Si S vérifie l'hypothèse, il est clair que toute partie de S vérifie l'hypothèse. Supposons qu'en outre toute partie de $n - 1$ éléments de S vérifie la conclusion. Soit A un point quelconque de S : tous les points de $S \setminus \{A\}$ sont sur un même cercle (Γ_A) sauf éventuellement un point A′. Soit B un point de S distinct de A et A′ : tous les points de S \ {B} sont sur un même cercle (Γ_B) sauf éventuellement un point B′. (Γ_A) et (Γ_B) ont en commun tous les points de S autres que A, A′, B, B′ : si $n \geq 7$, cela fait au moins 3 points, ce qui suffit à prouver que (Γ_A) et (Γ_B) sont confondus en un cercle passant par tous les points de S sauf éventuellement B′, puisque (Γ_A) passe par B. D'où la récurrence : si S, vérifiant l'hypothèse, a au moins 7 points, et si la conclusion est vraie pour toute partie de S, la conclusion est vraie pour S.

Malheureusement, un problème se pose au démarrage de la récurrence : le résultat n'est pas vrai pour tout ensemble de six points. En effet, si $n = 6$, il se peut que les cercles (Γ_A) et (Γ_B) ci-dessus ne soient pas confondus. Mais cela nécessite que A, A′, B, B′ soient quatre points distincts et que (Γ_A) et (Γ_B) n'aient en commun que les deux points restants C et C′. Or parmi les cinq points {A, A′, B, B′, C}, quatre au moins sont cocycliques : ce sont nécessairement {A, A′, B, B′} puisque (Γ_A) = (BB′C) ne passe ni par A ni par A′, et (Γ_B) = (AA′C) ne passe ni par B ni par B′. La seule configuration de six points vérifiant l'hypothèse sans vérifier la conclusion s'obtient à partir de trois cercles deux à deux sécants : (Γ_A) = (BB′CC′), (Γ_B) = (CC′AA′) et (Γ_C) = (AA′BB′).

Si maintenant il existait une configuration S de 7 points vérifiant l'hypothèse et non la conclusion, S posséderait une sous-configuration de six points du type ci-dessus : soit alors D le septième point. Comme toutes les intersections de (Γ_A), (Γ_B) et (Γ_C) appartiennent à {A, A′, B, B′, C, C′}, D appartient au plus à un de ces trois cercles, et nous pouvons supposer que D n'appartient ni à (Γ_B) ni à (Γ_C). Or, par hypothèse, parmi les cinq points {A, A′, B, C, D}, quatre au moins sont sur un même cercle (Γ) : comme (Γ_C) = (AA′B) ne passe ni par C ni par D et (Γ_B) = (AA′C) ne passe ni par B ni par D, le seul de ces cinq points qui n'appartient pas (Γ) est nécessairement A ou A′. Supposons que ce soit A′ : (Γ) = (ABCD), et donc D n'appartient pas à (Γ_A), sinon (Γ) et (Γ_A) auraient trois poin:s communs sans être confondus (A n'est pas sur (Γ_A)).

Une inversion de pôle D transforme A, A′, B, B′, C, C′ en a, a', b, b', c, c', et les cercles (Γ_A), (Γ_B), (Γ_C) en trois cercles (Γ_a), (Γ_b), (Γ_c). Elle transforme (Γ) en une droite passant par a, b et c. Appelons α, β, γ les points d'intersection : $\alpha = (bb') \cap (cc')$, $\beta = (bb') \cap (aa')$ et $\gamma = (aa') \cap (bb')$. b, b', c et c' étant cocycliques, $\overline{\alpha b} \cdot \overline{\alpha b'} = \overline{\alpha c} \cdot \overline{\alpha c'}$, et de même : $\overline{\beta c} \cdot \overline{\beta c'} = \overline{\beta a} \cdot \overline{\beta a'}$ et $\overline{\gamma a} \cdot \overline{\gamma a'} = \overline{\gamma b} \cdot \overline{\gamma b'}$. Or, en appliquant le théorème de Ménélaüs au triangle $\alpha\beta\gamma$, a, b, c alignés entraîne :

$$\frac{\overline{\beta a}}{\overline{\gamma a}} \cdot \frac{\overline{\gamma b}}{\overline{\alpha b}} \cdot \frac{\overline{\alpha c}}{\overline{\beta c}} = 1.$$

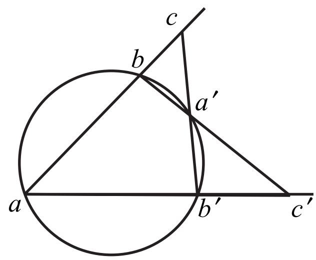
On en déduit:

$$\frac{\overline{\beta a'}}{\overline{\gamma a'}} \cdot \frac{\overline{\gamma b'}}{\overline{\alpha b'}} \cdot \frac{\overline{\alpha c'}}{\overline{\beta c'}} = 1.$$

ce qui entraîne : a', b', c' eux aussi alignés, ou encore : {D, A′, B′, C′} cocycliques. Dès lors, parmi les cinq points {D, A′, B′, B, C} on ne peut pas en trouver quatre cocycliques, ce qui contredit l'hypothèse.

La principale difficulté, c'est d'argumenter géométriquement que pour 7 points du plan, il ne peut pas exister 7 cercles tels que chaque cercle passe par 4 points et chaque point appartienne à 4 cercles. Combinatoirement, cela semble possible avec les cercles (BB′CC′), (CC′AA′), (AA′BB′), (DABC), (DAB′C′), (DA′BC′) et (DA′B′C) : on voit là une jolie configuration où points et cercles jouent des rôles étonnamment symétriques. Mais, géométriquement, cette configuration n'est pas réalisable et, pour le prouver, il semble indispensable d'utiliser l'inversion.

Pierre Samuel commence par envoyer le point D à l'infini par une transformation circulaire : les quatre cercles passant par D deviennent quatre droites (abc), ($ab'c'$), ($a'bc'$), ($a'b'c$), avec $\{b, b', c, c'\}$ cocycliques tout comme $\{c, c', a, a'\}$ et $\{a, a', b, b'\}$. Puis, l'inversion de pôle a qui laisse invariant le cercle ($bb'cc'$) transforme le cercle ($aa'bb'$) en la droite (cc') et le cercle ($aa'cc'$) en la droite (bb') : l'image de a' appartient donc aux trois droites (aa'), (bb') et (cc') ce qui est impossible, car $(aa') \cap (cc')$ et $(bb') \cap (cc')$ sont conjugués harmoniques par rapport à c et c'.



Marie-Laure Chaillout se contente d'une seule inversion de pôle D : (bb') est l'axe radical de ($bb'cc'$) et ($bb'aa'$), et (aa') l'axe radical de ($aa'bb'$) et ($aa'cc'$), leur intersection p appartient donc à l'axe radical de ($bb'cc'$) et ($aa'cc'$), soit (cc'), mais c'est aussi le pôle de (cc') par rapport à ($aa'bb'$), d'où contradiction puisqu'il ne peut pas être sur le cercle ($aa'bb'$).

Enfin, René Manzoni s'en tient aux égalités angulaires : après l'inversion de pôle D, la cocyclicité de $\{a, a', b, b'\}$ et les alignements (abc), ($ab'c'$), ($a'bc'$) et ($a'b'c$) permettent d'écrire $(ab, ab') = (a'b, a'b')$, soit $(ac, ac') = (a'c', a'c)$ et $(ba, ba') = (b'a, b'a')$, soit $(bc, bc') = (b'c', bc)$. Pour qu'en outre $\{a, a', c, c'\}$ d'une part, $\{b, b', c, c'\}$ d'autre part soient cocycliques, il faudrait que les quatre angles (ac, ac'), $(a'c', a'c)$, (bc, bc') et $(b'c', b'c)$ soient droits, donc que a, a', b, b' soient tous quatre sur le cercle de diamètre cc', ce qui n'est manifestement pas le cas.