

Solution de Jean Gounon (Chardonnay)

1) Notations

On désigne par :

(E_l) l'ensemble de points cherché (dépendant de l) ;

(F₁) le domaine fermé limité par le triangle ABC ;

(F₂) le complémentaire dans le plan de (F₁).

On va étudier successivement les intersections (E_l) ∩ (F₁) et (E_l) ∩ (F₂).

2) Étude de (E_l) ∩ (F₁).

Pour tout point M ∈ (F₁), notons H, K et L, les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AB), (BC) et (CA) (figure ci-contre).

D'autre part, soient $a = \frac{2h}{\sqrt{3}}$ la longueur du côté du triangle ABC et s, s₁, s₂, s₃ les aires respectives des triangles ABC, MAB, MBC et MCA. $s = \frac{ah}{2} = \frac{h^2}{\sqrt{3}}$;

et par ailleurs

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = \frac{1}{2}(AB \times MH + BC \times MK + CA \times ML) = \frac{a}{2}(MH + MK + ML) ;$$

donc

$$MH + MK + ML = \frac{2h^2}{a\sqrt{3}} = h.$$

f(M) est donc égal à la constante h.

Si l = h : (E_l) ∩ (F₁) = (F₁),

D'où la discussion :

Si l ≠ h : (E_l) ∩ (F₁) = ∅.

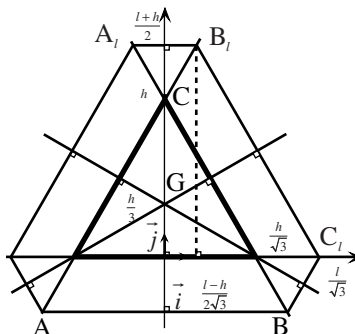
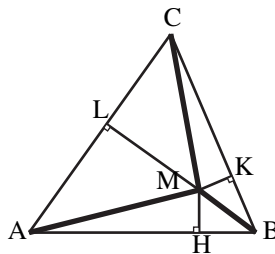
3) Étude de (E_l) ∩ (F₂).

a) (E_l) ∩ (F₂) étant invariant par la rotation $r_{G, \frac{2\pi}{3}}$ (G centre de gravité du triangle ABC), on

réduira son étude aux deux zones (I) et (II) ainsi définies (figure ci-contre) ;

Zone (I) : intersection des deux demi-plans fermés de frontières (AC) et (BC) ne contenant pas G.

Zone (II) : intersection des deux demi-plans fermés de frontières (AB) et (AC) contenant G et du demi-plan ouvert de frontière (BC) ne contenant pas G.



On se donne le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) ainsi défini : O est le milieu de [AB], $\vec{i} = \frac{\overline{OB}}{OB}$,

$\vec{j} = \frac{\overline{OC}}{OC}$. Dans ce repère, les coordonnées de A sont $\left(-\frac{h}{\sqrt{3}}, 0\right)$, celles de B :

$\left(\frac{h}{\sqrt{3}}, 0\right)$, celles de C : $(0, h)$; l'équation de (AB) est $y = 0$, celle de (AC) est

$x\sqrt{3} - y + h = 0$, et celle de (BC) est $x\sqrt{3} + y - h = 0$.

On a alors, pour tout point M du plan :

$$f(M) = |y| + \frac{|x\sqrt{3} - y + h|}{2} + \frac{|x\sqrt{3} + y - h|}{2}.$$

b) Étude dans la zone (I) :

Pour tout point M de la zone (I) : $y > h$, $x\sqrt{3} - y + h \leq 0$, $x\sqrt{3} + y - h \geq 0$. Donc :

$$f(M) = y + \frac{1}{2}(-x\sqrt{3} + y - h + x\sqrt{3} + y - h) = 2y - h,$$

donc :

$$f(M) = l \Leftrightarrow 2y - h = l \Leftrightarrow y = \frac{h+l}{2}.$$

La condition $y > h$ pour un point de cette zone se traduit, pour que l'ensemble cherché

soit non vide dans cette zone, par $\frac{h+l}{2} > h$, soit $l > h$.

Cette condition étant remplie, la partie de l'ensemble cherché située dans la zone (I) est donc le segment $[A_l B_l]$ parallèle à (BC), avec $A_l \in (BC)$ et A_l de coordonnées

$\left(x_{A_l}, \frac{h+l}{2}\right)$; donc : $x_{A_l} \sqrt{3} + \frac{h+l}{2} - h = 0$, soit $x_{A_l} = \frac{h-l}{2\sqrt{3}}$, et donc $x_{B_l} = \frac{l-h}{2\sqrt{3}}$.

c) Étude dans la zone (II) :

Pour tout point M de la zone (II) : $y \geq 0$, $x\sqrt{3} - y + h \geq 0$, $x\sqrt{3} + y - h \geq 0$. Donc ici :

$$f(M) = y + \frac{1}{2}(2x\sqrt{3}) = y + x\sqrt{3}.$$

Donc :

$$f(M) = l \Leftrightarrow x\sqrt{3} + y - l = 0.$$

La condition $x\sqrt{3} + y - h \geq 0$ pour un point de cette zone se traduit, pour que

l'ensemble cherché soit non vide dans cette zone, par : $x\sqrt{3} + y - h \geq x\sqrt{3} + y - l$, soit de nouveau $l > h$.

Cette condition étant remplie, soit (Δ) la droite d'équation $x\sqrt{3} + y - l = 0$. $B_l \in (\Delta)$

car $\frac{l-h}{2\sqrt{3}} \times \sqrt{3} + \frac{h+l}{2} - l = 0$. La partie de l'ensemble cherché située dans la zone (II) est donc le segment $[B_l C_l]$ parallèle à (BC) , avec $C_l \in (AB)$, dont l'abscisse x_{C_l}

vérifie donc : $x_{C_l} \sqrt{3} - l = 0$, soit $x_{C_l} = \frac{l}{\sqrt{3}}$.

Remarque : $A_l B_l = \frac{l-h}{\sqrt{3}}$ et

$$(B_l C_l)^2 = \left(\frac{l}{\sqrt{3}} - \frac{l-h}{2\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{l+h}{2} \right)^2 = \left(\frac{l+h}{2\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{l+h}{2} \right)^2 = \frac{(l+h)^2}{3}.$$

Donc $B_l C_l = \frac{l+h}{\sqrt{3}}$. On en déduit : $B_l C_l - A_l B_l = \frac{2h}{\sqrt{3}} = a$; la différence de longueur entre les deux segments est donc la constante a (longueur du côté du triangle ABC).

4) Discussion-résumé :

1) $l < h$: $(E_l) = \emptyset$.

2) $l = h$: $(E_l) = (F_1)$ (domaine fermé limité par le triangle ABC).

3) $l > h$: (E_l) est un hexagone à côtés parallèles aux côtés du triangle ABC, les longueurs des côtés successifs prenant alternativement deux valeurs (fixes pour chaque valeur de l) dont la différence est la longueur du côté du triangle ABC.