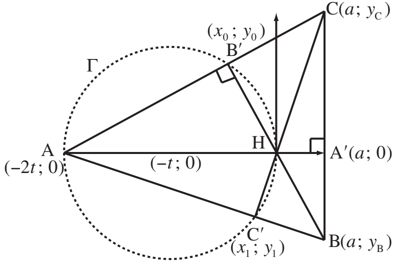
***Solution de Michel Lafond (Dijon)***

**1)** Soient AA′, BB′, CC′ les hauteurs et H l'orthocentre du triangle acutangle ABC.
On connaît HA′ = $a$, HB′ = $b$, HC′ = $c$.
Prenons comme paramètre le rayon $t$ du cercle Γ de diamètre AH.
Dans le repère (HA′,H$y$) ce cercle a pour équation $x^2 + y^2 = -2\,tx$.




Les coordonnées ($x_0$ ; $y_0$) de B′ vérifient $b^2 = x_0^2 + y_0^2 = -2tx_0$. Donc $x_0 = -\dfrac{b^2}{2t}$,

$$y_0 = \frac{b\sqrt{4t^2 - b^2}}{2t}.$$

Les coordonnées ($x_1$ ; $y_1$) de C′ vérifient $c^2 = x_1^2 + y_1^2 = -2tx_1$. Donc $x_1 = -\dfrac{c^2}{2t}$,

$$y_1 = -\frac{c\sqrt{4t^2 - c^2}}{2t}.$$

Le signe moins dans $y_1$ vient du fait que ABC est acutangle, donc B′ et C sont d'ordonnées positives, et B et C′ sont d'ordonnées négatives.

On calcule facilement les coordonnées de B (intersection de AC′ et BC) et de C (intersection de AB′ et BC) : leur abscisse commune est $a$ et leurs ordonnées valent :

$$y_B = \frac{-c(a+2t)}{\sqrt{4t^2 - c^2}}, \quad y_C = \frac{b(a+2t)}{\sqrt{4t^2 - b^2}}.$$

L'alignement BHB′ entraîne $x_0\, y_B = a\, y_0$ qui se simplifie en :

$$\sqrt{4t^2 - b^2}\sqrt{4t^2 - c^2} = \frac{bc(a+2t)}{a} \qquad (1)$$

[On obtiendrait la même chose en traduisant l'alignement CHC′].

Dans (1), l'élévation au carré et une simplification par $t$ mène à l'équation en $t$ :

$$\phi(t) = 4at^3 - \left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right)t - ab^2c^2 = 0 \qquad (2)$$

Le centre de symétrie de la courbe de $\phi$ a pour coordonnées $(0\,;\,-ab^2c^2)$ donc l'équation (2) a une seule racine positive qu'on peut exprimer en fonction de $a$, $b$, $c$ par les formules classiques (voir §4).

Soit $t$ cette racine positive.
On calcule enfin en fonction de $t$ donc de $a$, $b$, $c$ les mesures demandées :

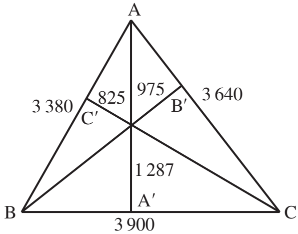
**2) Mesures des côtés :**

De $AB^2 = AA'^2 + A'B^2 = (a+2t)^2 + y_B^2$, on tire $AB = \dfrac{2t(a+2t)}{\sqrt{4t^2 - c^2}} = \dfrac{2at}{bc}\left(\sqrt{4t^2 - b^2}\right)$ d'après (1).

De $AC^2 = AA'^2 + A'C^2 = (a+2t)^2 + y_C^2$, on tire $AC = \dfrac{2t(a+2t)}{\sqrt{4t^2 - b^2}} = \dfrac{2at}{bc}\left(\sqrt{4t^2 - c^2}\right)$ d'après (1).

$$BC = y_C - y_B = \frac{a}{bc}\left(b\sqrt{4t^2 - c^2} + c\sqrt{4t^2 - b^2}\right).$$

**3)** Si on reprend les données de l'exercice 473-4 auquel fait référence Maurice Bauval, en multipliant par 65 pour avoir des nombres entiers, on obtient la figure ci-contre, à partir de : $a$ = 1287, $b$ = 975, $c$ = 825.




L'équation (2) est

$$6\,625\,476\, t^3 - 3\,348\,971\,071\,875\, t - 832\,713\,633\,984\,375 = 0.$$

Sa solution positive est $t$ = 812,5 (exactement). On a bien :

$$AB = \frac{2at}{bc}\left(\sqrt{4t^2 - b^2}\right) = 3\,380,\ \ AC = \frac{2at}{bc}\left(\sqrt{4t^2 - c^2}\right) = 3\,640,$$

$$BC = \frac{a}{bc}\left(b\sqrt{4t^2 - c^2} + c\sqrt{4t^2 - b^2}\right) = 3\,900.$$

**4) Résolution de l'équation (2)**

En divisant tout par $4\,a^2$ , on obtient la forme standart :

$$t^3 + pt + q = 0 \qquad (3)$$

où $p = \dfrac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{4a^2}$ et $q = \dfrac{b^2c^2}{4a}$.

Posons pour simplifier $S = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$. Le discriminant vaut

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{1}{64a^6}\left(a^4b^4c^4 - \frac{S^3}{27}\right).$$

Il est négatif car la moyenne géométrique de $\{a^2b^2,\ b^2c^2,\ c^2a^2\}$, soit $G=(a^4b^4c^4)^{\frac{1}{3}}$, étant inférieure à leur moyenne arithmétique $\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{3}=\dfrac{S}{3}=M$, après élévation au cube, on a bien $a^4b^4c^4\leq\dfrac{S^3}{27}$.

La théorie de l'équation du troisième degré nous dit que dans ce cas, les solutions de (3) sont données par : $t=\lambda\cos(\theta)$ où $\lambda^2=-\dfrac{4p}{3}$ ; $\cos(3\theta)=-\dfrac{4q}{\lambda^3}$.

Ici, on a : $\lambda^2=\dfrac{S}{3a^2}=\dfrac{M}{a^2}$ ; $\cos(3\theta)=\left(\dfrac{3}{S}\right)^{\frac{3}{2}}a^2b^2c^2=\left(\dfrac{G}{M}\right)^{\frac{3}{2}}$, d'où

$$3\theta=\pm\,\mathrm{Arccos}\left[\left(\frac{G}{M}\right)^{\frac{3}{2}}\right]+2k\pi.$$

Notons $\theta_0=\mathrm{Arccos}\left[\left(\dfrac{G}{M}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$. On a donc $\theta=\dfrac{1}{3}\left(\pm\theta_0+2k\pi\right)$.

Il est facile de voir que la solution positive de (3) est (pour $k=0$)

$$t=\lambda\cos\left(\frac{1}{3}\theta_0\right)=\frac{1}{a}\sqrt{M}\cos\left(\frac{1}{3}\theta_0\right).$$

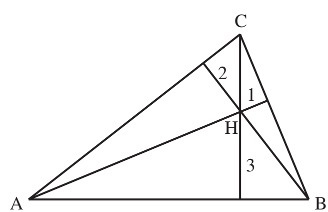
Finalement, les mesures des côtés sont obtenues par les formules ci-dessous :

M = moyenne arithmétique de $\{a^2b^2,\ b^2c^2,\ c^2a^2\}$,
G = moyenne géométrique de $\{a^2b^2,\ b^2c^2,\ c^2a^2\}$,

$$\theta_0=\mathrm{Arccos}\left[\left(\frac{G}{M}\right)^{\frac{3}{2}}\right],\ t=\frac{1}{a}\sqrt{M}\cos\left(\frac{1}{3}\theta_0\right),$$

$$AB=\frac{2at}{bc}\left(\sqrt{4t^2-b^2}\right),\ AC=\frac{2at}{bc}\left(\sqrt{4t^2-c^2}\right),$$

$$BC=\frac{a}{bc}\left(b\sqrt{4t^2-c^2}+c\sqrt{4t^2-b^2}\right).$$




**5)** Vérifions dans le cas particulier : $a=1$ ; $b=2$ ; $c=3$.
On a : $M=49/3$, $G=6^{4/3}$, $\theta_0\approx 0{,}994$, $t\approx 3{,}822$,
**AB ≈ 9,397, AC ≈ 8,955, BC ≈ 6,032.**