***Solution de Pierre Samuel (Hossegor)***

**1**) Voyons tout d'abord le cas où l'entier $m$ de l'énoncé est **pair**, $m = 2k$. La suite $(a_n)$ commence par 1, $2k$, $4k^2 - 1$, $8k^3 - 4k$. Le cas spécial $m = 2$, $k = 1$ étant traité dans l'énoncé, on suppose $k \geq 2$. On considère le nombre $\mathrm{A} = k + \sqrt{k^2 - 1}$.
C'est un entier quadratique (trace $2k$, norme 1) et irrationnel (car $k^2 - 1$ n'est pas un carré). Ses puissances sont de la forme : $\mathrm{A}^n = b_n + c_n\sqrt{k^2 - 1}$ où $b_n$, $c_n$ sont des entiers naturels tels que $b_n^2 - \left(k^2 - 1\right)c_n^2 = 1$.

Comme $\mathrm{A}^2 = 2k^2 - 1 + 2k\sqrt{k^2 - 1}$, on a $c_1 = a_1$ et $c_2 = a_2$. Pour montrer que $c_n = a_n$ pour tout $n$, et donc que les $a_n$ sont bien des entiers, il suffit de montrer que la suite $(c_n)$ satisfait la relation de récurrence $c_{n+1}^2 - c_{n+2}c_n = 1$. Ceci est classique et facile à vérifier. En effet,

$$\mathrm{A}^{n+1} = kb_n + \left(k^2 - 1\right)c_n + \left(b_n + kc_n\right)\sqrt{k^2 - 1},$$

$$\mathrm{A}^{n+2} = \left(2k^2 - 1\right)b_n + 2k\left(k^2 - 1\right)c_n + \left(2kb_n + \left(2k^2 - 1\right)c_n\right)\sqrt{k^2 - 1},$$

d'où

$$c_{n+1}^2 - c_{n+2}c_n = \left(b_n + kc_n\right)^2 - 2kb_nc_n - \left(2k^2 - 1\right)c_n^2 = b_n^2 - \left(k^2 - 1\right)c_n^2 = 1.$$

**2**) Lorsque $m$ est **impair**, on introduit l'entier quadratique $\mathrm{A} = \frac{1}{2}\left(m + \sqrt{m^2 - 4}\right)$, (trace $m$, norme 1), irrationnel (car $m^2 - 4$ n'est pas un carré). Écrivons ses puissances sous la forme $2\mathrm{A}^n = b_n + c_n\sqrt{m^2 - 4}$ où $b_n$, $c_n$ sont des entiers de même parité tels que $b_n^2 - \left(m^2 - 4\right)c_n^2 = 4$. Comme $2\mathrm{A}^2 = m^2 - 2 + m\sqrt{m^2 - 4}$, on a $a_1 = c_1$ et $a_2 = c_2$. Pour voir que $a_n = c_n$ et est donc un entier pour tout $n$, il suffit de montrer que la suite $(c_n)$ satisfait la même relation de récurrence $c_{n+1}^2 - c_{n+2}c_n = 1$ que $(a_n)$. Comme ci-dessus, ceci résulte d'un calcul sans malice.
**Complément** : Le résultat ci-dessus admet une sorte de réciproque. Soit $(a_n)_{n \geq j}$ une suite croissante de nombres rationnels positifs tels que $a_{n+1}^2 - a_na_{n+2} = 1$ pour tout $n$. Si ses quatre premiers termes sont des entiers, elle se prolonge en une suite dont un terme vaut 1 (et tous ses termes sont donc entiers).

En effet, posons $a_j = a$ et $a_{j+1} = b$. On peut supposer $a > 1$.
Alors $a_{j+2} = (b^2 - 1)^2/a$ et $a_{j+3} = ((b^2 - 1)^2/a^2 - 1)/b = (b^4 - 2b^2 + 1 - a^2)/a^2b$ sont des entiers. Donc $b$ doit diviser $a^2 - 1$, d'où $a^2 - 1 = bc$ avec $c$ entier et $c < a$ car $a < b$. On peut alors prolonger la suite en posant $a_{j-1} = c$. Si $c = 1$, on a gagné. Sinon on peut recommencer car les quatre termes $a_{j-1}$, $a_j$, $a_{j+1}$, $a_{j+2}$ sont des entiers.