Solution de Jean-Yves Coquan (Albi)

Les nombres à un chiffre vérifiant la propriété d'avoir leur carré se terminant par ce même chiffre sont 0, 1, 5 et 6.
Seuls 5 et 6 vont permettre d'étendre cette propriété à de « vrais » nombres de n chiffres.
Tout nombre à deux chiffres se terminant par 0 et dont le chiffre des dizaines est non nul a son carré qui se termine par deux zéros.
Tout nombre à deux chiffres se terminant par 1 s'écrit $x = 10\,a + 1$ avec $a \neq 0$.
Alors $x^2 = 100\,a^2 + 20\,a + 1$ et x^2 se termine par $10\,a + 1$ si et seulement si $(x^2 - x)$ est multiple de 100.
Cette condition conduit à $10\,a = 0$ soit $a = 0$.
En revanche, en conduisant un raisonnement analogue, on trouve que 25 et 76 vérifient la propriété et que ce sont les seuls.
Par exemple : soit $x = 10\,a + 6$. Alors $x^2 = 100\,a^2 + 120\,a + 36$ et

$$(x^2 - x) = 100\,a^2 + 110\,a + 30.$$

Il est clair que $(x^2 - x)$ est multiple de 100 si et seulement si $a = 7$.

De la même manière, on peut démontrer qu'il existe un unique nombre à trois chiffres se terminant par 25 (625) et un unique nombre à trois chiffres se terminant par 76 (376) qui possèdent la propriété demandée.

Nous allons démontrer par récurrence qu'il existe pour tout n (à partir du rang 2) exactement deux nombres vérifiant la propriété.
Soit un nombre N à n chiffres vérifiant la propriété et considérons un nombre à $(n + 1)$ chiffres $x = 10^n\,a + \mathrm{N}$.
Alors $x^2 = 10^{2n}\,a^2 + 2\,\mathrm{N}\,a\,10^n + \mathrm{N}^2$.
x^2 se termine par x si et seulement si $(x^2 - x)$ est divisible par $10^n + 1$.
$(x^2 - x) = 10^{2n}\,a^2 + (2\mathrm{N} - 1)\,a\,10^n + \mathrm{N}^2 - \mathrm{N}$. Or comme N vérifie la propriété, $\mathrm{N}^2 - \mathrm{N} = 10^n\,p$ avec p entier naturel.
On aboutit donc à l'équation :

$$((2\mathrm{N} - 1)\,a + p)\,10^n = q\,10^n + 1.$$

Comme N et p sont connus, on a bien une équation du premier degré d'inconnue a avec une solution unique.