Solution de Marie-Laure Chaillout (Épinay sur Orge) — Par récurrence ou par division euclidienne du polynôme X^n par $X^2 - X - 1$, on établit, pour tout $n \geq 1$,

$$\varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1}.$$

Les premières puissances de φ sont $\varphi^2 = \varphi + 1$, $\varphi^3 = 2\varphi + 1$, $\varphi^4 = 3\varphi + 2$, $\varphi^5 = 5\varphi + 3$. Par ailleurs, pour $n \geq 1$,

$$F_{5n}\varphi + F_{5n-1} = \varphi^{5n} = \left(F_n\varphi + F_{n-1}\right)^5.$$

On développe par la formule du binôme, on utilise les calculs des puissances de φ ci-dessus pour obtenir

$$F_{5n}\varphi + F_{5n-1} = A_n\varphi + B_n$$

avec A_n, B_n entiers, l'expression de B_n important peu et

$$A_n = 5F_n\left(F_n^4 + 3F_n^3F_{n-1} + 4F_n^2F_{n-1}^2 + 2F_nF_{n-1}^3 + F_{n-1}^4\right).$$

L'irrationalité de φ rendant possible l'identification du coefficient devant φ, on en déduit que $F_{5n} = A_n$, i. e.

$$F_{5n} = 5F_nP_n \text{ avec } P_n = F_n^4 + 3F_n^3F_{n-1} + 4F_n^2F_{n-1}^2 + 2F_nF_{n-1}^3 + F_{n-1}^4. \qquad (1)$$

Par ailleurs, la formule de Binet donne

$$2^{n-1}F_n = n + 5\sum_{j=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\binom{n}{2j+1}5^{j-1}.$$

Donc 5 divise F_n si et seulement si 5 divise n. De plus,

$$2^{n-1}F_n \equiv n \bmod 5.$$

$$2^{n-1}F_{n-1} \equiv 2(n-1) \bmod 5.$$

Comme $16 \equiv 1 \bmod 5$, on déduit de ces congruences que, module 5,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}_n &\equiv 2^{4(n-1)}\mathrm{P}_n \\
&\equiv \left(2^{n-1}\mathrm{F}_n\right)^4 + 3\left(2^{n-1}\mathrm{F}_n\right)^3\left(2^{n-1}\mathrm{F}_{n-1}\right) + 4\left(2^{n-1}\mathrm{F}_n\right)^2\left(2^{n-1}\mathrm{F}_{n-1}\right)^2 \\
&\qquad + 2\left(2^{n-1}\mathrm{F}_n\right)\left(2^{n-1}\mathrm{F}_{n-1}\right)^3 + \left(2^{n-1}\mathrm{F}_{n-1}\right)^4 \\
&\equiv n^4 + 6n^3(n-1) + 16n^2(n-1)^2 + 16n(n-1)^3 + 16(n-1)^4 \\
&\equiv 1.
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$v_5\left(\mathrm{F}_{5n}\right) = 1 + v_5\left(\mathrm{F}_n\right) \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ que l'on décompose en $n = 5^k q$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ non divisible par 5. Alors

$$v_5\left(\mathrm{F}_n\right) = k + v_5\left(\mathrm{F}_q\right),$$

et puisque 5 ne divise pas $_\theta$, il ne divise pas non plus F_q. Finalement,

$$v_5\left(\mathrm{F}_n\right) = k = v_5(n),$$

ce qui permet de conclure.