Commentaire. Vincent Thill (Migennes) remarque que

$$\left(x^4+xy^3\right)^3+\left(y^4+yx^3\right)^3=(x+y)^4\left(x^2-xy+y^2\right)^4.$$

Il pose alors $z^2 = x^4 + xy^3$. Par exemple, si $x = 1$ et $y = 2$, il prend $z = 3$ puis $a = z^3 = 27$, $b = y^4 + yx^3 = 18$ et $c=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)=9$, d'où la solution

$$27^2 + 18^3 = 9^4.$$

J'ignore d'où sort la formule de factorisation proposée ci-dessus. Par ailleurs, poser $z^2 = x^4 + xy^3$ n'est pas toujours possible puisque l'on veut z entier. Cela dit, le petit programme en *Maple* ci-dessous montre que l'on obtient effectivement des solutions non triviales à l'équation :

```
test := proc(n)
local x, y, z, s ;
s := NULL;
for x to n do
for y to n do z := sqrt(x ^4+x*y^3) ;
if frac(z) = 0 then s := s, [z^3, y^4+y*x^3,
abs((x+y) * (x^2-x*y+y^2))]
end if;
end do;
end do;
s
end proc
```

En prenant ne serait-ce que $n = 10$, on trouve tout de même cinq solutions :

a	b	c
27	18	9
1 728	288	72
19 683	1 458	243
110 592	4 608	576
421 875	11 250	1 125