Solution de Franck Gautier (Pérignat lès Sarlième).

Pour $1 \le p \le l \le k$, on note

$$\mathrm{A}_p^l = \prod_{i=p}^{l} (a_i - 1).$$

Si $1 \le p < l \le k$, alors

$$\mathrm{A}_p^l = (a_p - 1)\,\mathrm{A}_{p+1}^l = a_p \mathrm{A}_{p+1}^l - \mathrm{A}_{p+1}^l .$$

Puisque n divise $a_p (a_{p+1} - 1)$, il divise aussi $a_p \mathrm{A}_{p+1}^l$, d'où la congruence

$$\mathrm{A}_p^l \equiv -\mathrm{A}_{p+1}^l \mod n.$$

On en déduit

$$\mathrm{A}_p^l \equiv (-1)^{l-p}\, \mathrm{A}_l^l \mod n.$$

En prenant successivement $(p,l) = (1,k)$ et $(p,l) = (2,k)$, on obtient

$$\mathrm{A}_1^k \equiv (-1)^{k-1} (a_k - 1) \mod n$$

puis

$$\mathrm{A}_2^k \equiv (-1)^k (a_k - 1) \mod n.$$

Comme $\mathrm{A}_1^k = (a_1 - 1)\mathrm{A}_2^k$, on trouve

$$a_1 (a_k - 1) \equiv 0 \mod n.$$

Donc n divise $a_1 (a_k - 1)$. Pour finir, si n divisait aussi $a_k (a_1 - 1)$, il diviserait

$$a_1 (a_k - 1) - a_k (a_1 - 1) = a_k - a_1,$$

ce qui est impossible puisque $1 \le a_k - a_1 \le n - 1$.