Exercice 485-2

Soit ABC un triangle d'aire S. Démontrer la relation : $AB^2 + AC^2 + BC^2 \geq 4\,S\sqrt{3}$

Solution de Jean-Claude Carréga (Lyon)

1) <u>Lemme 1</u> : Si u, v, w sont des nombres réels positifs on a : $u\,v\,w \leq \left(\frac{u+v+w}{3}\right)^3$.

<u>Preuve</u> : Le résultat est évident si l'un des 3 nombres est nul. En les supposant non nuls, l'inégalité à démontrer est équivalente à celle obtenue en prenant le logarithme des 2 membres, soit :

$\ln(u) + \ln(v) + \ln(w) \leq 3\ln\left(\frac{u+v+w}{3}\right)$, qui s'écrit aussi

$-\ln\left(\frac{u+v+w}{3}\right) \leq -\frac{\ln(u)}{3} - \frac{\ln(v)}{3} - \frac{\ln(w)}{3}$. Mais cette dernière inégalité résulte de la convexité de la fonction $f(x) = -\ln(x)$. En effet, on a pour $x > 0$ $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$.

2) <u>Lemme 2</u> : Si ABC est un triangle d'aire S et de demi-périmètre p, on a $S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$.

<u>Preuve</u> : On note a, b et c les longueurs des côtés [BC], [CA] et [AB] du triangle. On applique le lemme 1 avec $u = p - a$, $v = p - b$, $w = p - c$, on obtient :

$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3$. Sachant que $a + b + c = 2\,p$, cela s'écrit

$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{p}{3}\right)^3$. D'où $p\,(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{p^4}{3^3}$ et en prenant la racine carrée des 2 membres, on obtient $S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$.

3) <u>L'exercice</u> : Avec les notations du lemme 2, on veut établir que $4S\sqrt{3} \leq a^2 + b^2 + c^2$.

D'après le lemme 2 on a $4\,S\sqrt{3} \leq \frac{4\,p^2}{3} = \frac{(2p)^2}{3} = \frac{(a+b+c)^2}{3}$. Donc, pour obtenir l'inégalité demandée, il suffit d'établir que $(a + b + c)^2 \leq 3\,(a^2 + b^2 + c^2)$.

Cette inégalité est équivalente à celles qui suivent :

$a^2 + b^2 + c^2 + 2\,(a\,b + b\,c + c\,a) \leq 3\,(a^2 + b^2 + c^2)$

$2\,(a\,b + b\,c + c\,a) \leq 2\,(a^2 + b^2 + c^2)$

$2\,(a\,b + b\,c + c\,a) \leq (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + a^2)$

$0 \leq (a^2 + b^2 - 2\,a\,b) + (b^2 + c^2 - 2\,b\,c) + (c^2 + a^2 - 2\,c\,a)$

$0 \leq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$.

Cette dernière inégalité étant évidente, on obtient bien le résultat demandé.

4) <u>Remarque</u> : Lorsque le triangle ABC est équilatéral, on a $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, d'où $4\,S\sqrt{3} = 3\,a^2$, ainsi, dans ce cas, l'inégalité $4S\sqrt{3} \leq a^2 + b^2 + c^2$ est une égalité. Réciproquement, l'égalité $4S\sqrt{3} = a^2 + b^2 + c^2$ entraîne, d'après l'étude précédente, $(a + b + c)^2 = 3\,(a^2 + b^2 + c^2)$, qui s'écrit aussi $0 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ et qui donne $a = b = c$.

Ainsi on a l'égalité $4S\sqrt{3} = a^2 + b^2 + c^2$ si et seulement si le triangle ABC est équilatéral.

Solution de Bernard Collignon (Coursan)

On se place dans un repère orthonormal $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$;
on peut prendre sans perte de généralité A (0 ; 0),B (1 ; 0).
On considère sans perte de généralité non plus le point C (x ; y) où x et y sont des réels positifs ou nuls quelconques.

L'aire S du triangle ABC est donnée par : $S = \frac{1}{2} \times \text{Base} \times \text{Hauteur} = \frac{1}{2} \times AB \times y = \frac{1}{2}\ y$.

D'autre part, on a : $AB^2 = 1$, $AC^2 = x^2 + y^2$ et $BC^2 = (x-1)^2 + y^2 = x^2 - 2x + y^2 + 1$.

L'inégalité à démontrer s'écrit alors : $2x^2 + 2y^2 - 2x + 2 \geq 2\sqrt{3}\ y$

$$\Leftrightarrow \qquad x^2 - x + y^2 - \sqrt{3}\,y + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 - \frac{3}{4} + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 \geq 0\ .$$

Cette inégalité est bien vérifiée pour tout x et tout y : l'égalité est obtenue lorsque $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$,

ce qui correspond au cas où le triangle ABC est équilatéral.

Solution de Frédéric de Ligt (Montguyon)

On note de façon conventionnelle a = BC, b = AC et c = AB. La formule de Héron donne

$$16S^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

Par ailleurs, pour trois nombres positifs x, y et z, on a les inégalités de moyennes suivantes :

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$$

On a donc : $16S^2 \leq (a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ et en passant à la racine carrée :

$$4S \leq \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}} = \sqrt{3}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \leq \sqrt{3}\,\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

ou encore $a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3}$ avec égalité quand $a = b = c$.

Solutions de Louis-Marie Bonneval (Poitiers)

Première solution

Appelons I le milieu de BC, H le pied de la hauteur issue de A.

$AB^2 + AC^2 + BC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2} + BC^2 = 2AI^2 + \frac{3BC^2}{2} = \frac{1}{2}(4AI^2+3BC^2)$

$= \frac{1}{2}[(2AI-\sqrt{3}\,BC)^2+4\sqrt{3}\,AI.BC] \geq 2\sqrt{3}\,AI.BC \geq 2\sqrt{3}\,AH.BC = 4S\sqrt{3}$.

Il y a égalité quand les deux inégalités ci-dessus sont des égalités, c'est-à-dire $2AI=\sqrt{3}\,BC$ et H=I : le triangle doit être équilatéral. Dans ce cas l'égalité est bien vérifiée : a désignant le côté, $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, et chaque membre vaut $3a^2$.

Deuxième solution

Appelons a, b, c les longueurs BC, CA, AB.

D'après la formule de Héron, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ où $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Autrement dit, $4S = \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$.

Pour comparer $a^2+b^2+c^2$ et $4S\sqrt{3}$, comparons leurs carrés :

$(a^2+b^2+c^2)^2 - 48\,S^2 = (a^2+b^2+c^2)^2 - 3\,(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$

$= 4(a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2) = 2[(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2] \geq 0$.

Il y a égalité quand $a^2=b^2=c^2$, c'est-à-dire quand le triangle est équilatéral.

Solutions de Dominique Roux (Espaly)

Première solution

$$\left.\begin{array}{r} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos A \\ b^2 = c^2 + ca^2 - 2ca\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos C \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2\,(bc\ \cos A + ca\cos B + ab\ \cos C)$$

et avec $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B$ on a :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4S\mathrm{X} \quad \text{où} \quad \mathrm{X} = \text{cotan}A + \text{cotan}B + \text{cotan}C$$

Lemme : $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

En effet,

c'est $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{\sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)}$ et on divise haut et bas par $\cos(\alpha)\cos(\beta)$.

Alors $\tan A = \tan(\pi - B - C) = -\tan(B+C) = \dfrac{-\tan B - \tan\beta}{1-\tan B\tan C}$;

$$\text{d'où} \quad \tan A\tan B\tan C = \tan A + \tan B + \tan C\,.$$

et par suite, puisque $\text{cotan}\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$, on a $\text{cotan}A\ cotanB\ + \text{cotan}B\ cotanC + \text{cotan}C\ cotanA = 1$.

Formons $\quad E = \left(\text{cotan}A - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\text{cotan}B - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\text{cotan}C - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$,

c'est $\text{cotan}^2 A + \text{cotan}^2 A + \text{cotan}^2 A - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\ (cotanA +\ cotanB +\ cotanC) + 1$.

Or $\mathrm{X}^2 = \text{cotan}^2 A + \text{cotan}^2 A + \text{cotan}^2 A + 2\ (cotanA\ cotanB\ + cotanB\ cotanC + cotanC\ cotanA)$.

Finalement $E = \mathrm{X}^2 - 2 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\ \mathrm{X} + 1 = \mathrm{X}^2 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{X} - 1 = \left(X - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \dfrac{4}{3}$.

$$\text{Comme } E \geq 0\ et\ \mathrm{X} > 0\ ,\ \text{ on obtient } \mathrm{X} - \frac{1}{\sqrt{3}} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}\ ,\ \text{ soit }\ \mathrm{X} \geq \sqrt{3}\ ;$$

$$\text{d'où}\quad a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S\ .$$

L'égalité a lieu lorsque chaque cotangente vaut $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, soit quand chaque angle vaut 60° : ABC équilatéral.

Deuxième solution

Avec $\quad S = \dfrac{1}{2}bc\ \sin A$, $\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \ \cos A\ \ et\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ \sin A + \dfrac{1}{2}\cos A = \cos(A - 60°)$,

on a $\quad a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S \Leftrightarrow b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}.\dfrac{1}{2}bc\ \sin A\ - b^2 - c^2 + 2bc\ \ \cos A$

$\Leftrightarrow\ b^2 + c^2 \geq 2bc\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ \sin A + \dfrac{1}{2}\cos A\right) \Leftrightarrow\ b^2 + c^2 \geq 2bc\ \cos(A - 60°)$

$\Leftrightarrow\ b^2 + c^2 - 2bc \geq 2bc\ [cos(A - 60°) - 1] \Leftrightarrow\ (b - c)^2 + 2bc\ [1 - cos(A - 60°)] \geq 0$.

$$\text{Vrai car}\ \ 1 - cos(A - 60°) \geq 0\ .$$

L'égalité n'a lieu que si $b = c$ et $A = 60°$, donc ABC équilatéral.

Solution de Pierre Lapôtre (Calais)

Étant donné un triangle ABC et H le pied de la hauteur issue de A, on note $BC\ =\ a$, $AH\ =\ h$
et x l'abscisse de H sur la droite (BC) munie d'un repère d'origine B.
Le théorème de Pythagore donne alors l'expression de $\ AB^2 +\ AC^2 +\ BC^2$ en fonction de x :

$$AB^2 +\ AC^2 +\ BC^2 = x^2 + h^2 + (x - a)^2 + h^2 + a^2$$

On notera φ cette fonction de la variable x, définie sur R.
On a $\quad \varphi(x) = 2\ (x^2 + ax + h^2 + a^2)$.
φ présente en $\dfrac{a}{2}$ un minimum égal à $\dfrac{3a^2}{2} + 2h^2$.

Ainsi pour tout triangle ABC, avec les notations indiquées, $AB^2 + AC^2 + BC^2 \geq \frac{3a^2}{2} + 2h^2$.

Or $\frac{3a^2}{2} + 2h^2 - 2ah\sqrt{3} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}h\right)^2$ soit $\frac{3a^2}{2} + 2h^2 - 4S\sqrt{3} \geq 0$;

c'est à dire $\frac{3a^2}{2} + 2h^2 \geq 4S\sqrt{3}$.

Par transitivité de l'inégalité, on obtient la minoration souhaitée.

remarque : l'égalité est obtenue pour le triangle équilatéral.