Solution d'Emmanuel Moreau (Dublin) – Si k n'est pas de la forme 2^p5^q avec $p,\ q \in \mathbb{N}$, le nombre $\frac{1}{k}$ n'est pas décimal et par conséquent, $S\left(\left[\frac{10^l}{k}\right]+1\right)$ tend vers $+\infty$ quand l tend vers $+\infty$. On suppose l supérieur au nombre de chiffres de k et l'on pose $n_l = \left[\frac{10^l}{k}\right]+1$. L'encadrement

$$\frac{10^l}{k} < \left[\frac{10^l}{k}\right]+1 \leq \frac{10^l}{k}+1$$

implique

$$10^l < kn_l \leq 10^l + k,$$

donc

$$S(kn_l) \leq \max\left\{S(10^l+i)\,;\, i \in [\![1,k]\!]\right\} \leq k+1,$$

cette dernière inégalité étant justifiée par le fait que, pour l supérieur au nombre de chiffres de k et i dans [[1, k]],

$$S(10^l+i) = 1+S(i) \leq 1+i \leq 1+k.$$

Finalement,

$$\frac{S(n_l)}{S(kn_l)} \geq \frac{S(n_l)}{k+1} \xrightarrow[l\to+\infty]{} +\infty.$$

On s'intéresse maintenant au cas où k est de la forme 2^p5^q avec $p,\ q \in \mathbb{N}$. On étend naturellement la définition de S à tout nombre décimal. On va montrer que si x, y sont des nombres décimaux (strictement positifs), $S(xy) \leq S(x)\,S(y)$.
On sait déjà que pour $m,\ n \in \mathbb{N}^*$, $S(m+n) \leq S(m) + S(n)$. Ensuite, pour m, $n \in \mathbb{N}^*$, on décompose n en base 10 :

$$n = \sum_{j=0}^{s} \varepsilon_j 10^j, \quad \varepsilon_j \in [\![0,9]\!].$$

On a alors

$$S(mn) = S\left(\sum_{j=0}^{s} \varepsilon_j 10^j m\right) \leq \sum_{j=0}^{s} S\left(\varepsilon_j 10^j m\right) \leq \sum_{j=0}^{s} S\left(\varepsilon_j m\right)$$

$$\leq S(m)\sum_{j=0}^{s} S\left(\varepsilon_j\right) = S(m)S(n).$$

La sous-multiplicativité de S s'étend alors aux nombres décimaux (strictement positifs) en remarquant que pour x décimal, $S(x) = S(10x)$.

Ainsi, si k est de la forme 2^p5^q, le nombre $\dfrac{1}{k}$ est décimal et donc

$$\mathrm{S}(n) = \mathrm{S}\left(kn \times \frac{1}{k}\right) \leq \mathrm{S}(kn)\mathrm{S}\left(\frac{1}{k}\right),$$

donc

$$\frac{\mathrm{S}(n)}{\mathrm{S}(kn)} \leq \mathrm{S}\left(\frac{1}{k}\right).$$

Ainsi, la suite $\left(\dfrac{\mathrm{S}(n)}{\mathrm{S}(kn)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par $\mathrm{S}\left(\dfrac{1}{k}\right)$, cette majoration étant optimale puisque l'entier n tel que $kn = 10^{\max(p,q)}$ fournit un cas d'égalité.

Emmanuel Moreau termine sa belle contribution en remarquant que l'on peut donner une expression plus simple de $\mathrm{S}\left(\dfrac{1}{k}\right)$, à savoir $\mathrm{S}\left(2^{|p-q|}\right)$. En effet, si $k = 2^p5^q$ avec par exemple $p \geq q$ (le cas $p < q$ est similaire),

$$\mathrm{S}\left(\frac{1}{k}\right) = \mathrm{S}\left(\frac{1}{2^p5^q}\right) = \mathrm{S}\left(\frac{10^p}{2^p5^q}\right) = \mathrm{S}\left(2^{p-q}\right).$$

Voici pour finir quelques exemples numériques :

k	2	4	5	8	10	16	20	25	32	40	50	80	128
$\mathrm{S}\left(\frac{1}{k}\right)$	5	7	2	8	1	13	5	4	11	7	2	8	23