Compléments sur le sous-groupe de Frattini –

(1) Si $(G,\cdot)$ est un groupe, on appelle sous-groupe de Frattini de G l'ensemble des éléments mous de G. Notons le F(G) et montrons qu'il est l'intersection des sous-groupes (propres) de G maximaux pour l'inclusion (s'il en existe). Si g est un élément mou de G et H un sous-groupe maximal de G, comme H n'est pas génératrice, $H \cup \{g\}$ ne l'est pas non plus, donc $H \subset \langle H \cup \{g\} \rangle \neq G$, ce qui, par maximalité de H, impose $H = \langle H \cup \{g\} \rangle$, c'est à dire $g \in H$. Réciproquement, si un élément g de G appartient à l'intersection des sous-groupes maximaux de G, si B est une partie de G non génératrice, $\langle B \rangle$ est un sous-groupe propre de G donc est contenu dans un sous-groupe maximal, disons H, et alors la partie $B \cup \{g\}$ est encore contenue dans H donc n'est toujours pas génératrice.

(2) Puisque les sous-groupes maximaux du groupe $(\mathbb{Z},+)$ sont les $p\mathbb{Z}$ pour p premier, le groupe de Frattini de $\mathbb{Z}$ est bien réduit à $\{0\}$.

(3) Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ sont les $d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour d divisant n. Pour d, d' divisant n, l'inclusion $d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \subset d'\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ équivaut à la divisibilité de d' par d. Les sous-groupes maximaux de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ sont donc les $p\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour p premier divisant n. Si l'on note $p_1, \ldots, p_k$ les facteurs premiers de n, l'intersection des sous-groupes maximaux de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ est donc $r\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où $r = p_1 \ldots, p_k$ est le radical de n.

(4) Puisque tout élément de $(\mathbb{Q},+)$ est mou, il n'existe pas de sous-groupe maximal dans $(\mathbb{Q},+)$.

(5) On peut ainsi trouver les éléments mous du groupe $(S_n, \circ)$ des permutations de $[[1, n]]$. Il suffit pour cela de montrer que pour $i \in [[1, n]]$, le stabilisateur de i

$$\mathrm{Stab}(i) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}$$

est un sous-groupe maximal de S_n. Le seul élément mou de S_n, devant laisser fixe chaque $i \in [[1, n]]$, est bien $\mathrm{id}_{[[1,n]]}$. Fixons donc $i \in [[1, n]]$ et montrons que Stab(i) est un sous-groupe maximal. Prenons $\sigma \in S_n - \mathrm{Stab}(i)$, posons $j = \sigma(i) \neq i$ et montrons que le sous-groupe $H = \langle \mathrm{Stab}(i) \cup \sigma \rangle$ contient S_n. Pour $p \in [[1, n]] - \{i,j\}$, la permutation $(p, j) \circ \sigma$ envoie i sur p. Puisque (p,j) laisse fixe i, la permutation $(p, j) \circ \sigma$ appartient à H. On peut ainsi trouver dans H un élément qui envoie i sur n'importe quel élément de $[[1, n]]$. Maintenant, si φ est une permutation quelconque de $[[1, n]]$, notons $p = \varphi(i)$ et prenons $\tau \in H$ envoyant i sur p. Alors $\tau^{-1} \circ \varphi$ envoie i sur i donc $\tau^{-1} \circ \varphi$ appartient à Stab(i) et φ appartient à H.