Solution de Pierre Renfer (Saint George d'Orques) –

(1) Pour montrer que l'ensemble des éléments mous est un sous-groupe de G, on remarque qu'un élément g de G est mou si pour toute partie B non génératrice de G, la partie B $\cup$ $\{g\}$ reste non génératrice. On note $\langle B \rangle$ le sous-groupe de G engendré par une partie B de G. Soit g, h deux éléments mous de G et B une partie non génératrice de G. Alors B $\cup$ $\{g\}$ n'est pas génératrice, et B $\cup$ $\{g,h\}$ non plus. Or

$$\left\langle \mathrm{B} \cup \left\{gh^{-1}\right\}\right\rangle \subset \left\langle \mathrm{B} \cup \left\{g,h\right\}\right\rangle \neq \mathrm{G},$$

donc gh^{-1} est mou. Pour conclure, le neutre est évidemment un élément mou.

(2) On montre que le seul élément mou de $(\mathbb{Z},+)$ est 0. Il est clair que ± 1 ne sont pas mous puisqu'ils sont générateurs. Soit a un élément de $\mathbb{Z} - \{0,\pm 1\}$. En prenant $b \in \mathbb{Z} - \{0,\pm 1\}$ premier avec a, le théorème de Bézout montre que la partie $\{a,b\}$ est génératrice de $\mathbb{Z}$ alors que $\{b\}$ ne l'est pas. Donc a n'est pas mou.

(3) On étudie les éléments mous de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ pour $n \geq 2$. Soit $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ la décomposition de n en produit de facteurs premiers. Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $\overline{a}$ la classe de a modulo n. On va montrer que $\overline{a}$ est mou si et seulement si $p_1 \dots p_k$ divise a. En particulier, $\overline{0}$ est le seul élément mou de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ si et seulement si n est sans facteur carré.

Si a est divisible par $p_1 \dots p_k$, si B est une partie non génératrice de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, le sous-groupe engendré par B admet un générateur $\overline{b}$ où b est un diviseur de n autre que ± 1. Dans ce cas, $\left\langle \mathrm{B} \cup \{\overline{a}\}\right\rangle = \left\langle \overline{d} \right\rangle$ où d est le pgcd de a et b. Comme d est divisible par l'un des p_i, $\left\langle \mathrm{B} \cup \{\overline{a}\}\right\rangle \neq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\overline{a}$ est mou.

Si a n'est pas divisible par $p_1 \dots p_k$, a est par exemple premier avec p_1 et alors $\{\overline{a}, \overline{p_1}\}$ est génératrice de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tandis que $\{\overline{p_1}\}$ ne l'est pas. Donc $\overline{a}$ n'est pas mou.

(4) On montre maintenant que tous les éléments de $(\mathbb{Q},+)$ sont mous. Puisque les éléments mous forment un sous-groupe de $(\mathbb{Q},+)$, il suffit de montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et tout p premier, le rationnel $\dfrac{1}{p^\alpha}$ est mou, l'ensemble de ces rationnels formant une partie génératrice de $(\mathbb{Q},+)$. Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Q},+)$ ne contenant pas $\dfrac{1}{p^\alpha}$. Il s'agit de montrer que $\mathrm{H} \cup \left\{\dfrac{1}{p^\alpha}\right\}$ n'engendre pas $\mathbb{Q}$. Le sous-groupe $\left(\dfrac{1}{p^\alpha}\mathbb{Z}\right) \cap \mathrm{H}$ est engendré par un élément $\dfrac{a}{p^\alpha}$ où a est un entier différent de ± 1. On distingue deux cas, selon que a est une puissance de p ou non.

(4.a) Dans le cas où a n'est pas une puissance de p, on considère q un facteur premier de a, autre que p. Alors

$$\left(\frac{1}{p^\alpha}\mathbb{Z}\right)\cap \mathrm{H} \subset \frac{q}{p^\alpha}\mathbb{Z},$$

donc $\mathbb{Z}\cap\mathrm{H}\subset q\mathbb{Z}$ car si x est dans $\mathbb{Z}\cap\mathrm{H}\subset\frac{q}{p^\alpha}\mathbb{Z}$, x s'écrit $\frac{kq}{p^\alpha}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et, comme p et q sont premiers, p^α divise k. Si une fraction irréductible $\frac{u}{v}$ appartient à H, u appartient à $\mathbb{Z} \cap \mathrm{H}$, donc u est divisible par q alors que v ne l'est pas. Ainsi, H est contenu dans $\mathbb{Q}_{(q)}$, sous-groupe de $(\mathbb{Q},+)$ formé des fractions irréductibles dont le dénominateur n'est pas divisible par q. La partie $\mathrm{H}\cup\left\{\frac{1}{p^\alpha}\right\}$ est alors contenue dans $\mathbb{Q}_{(q)}$, sous-groupe strict de $(\mathbb{Q},+)$, donc $\frac{1}{p^\alpha}$ est mou.

(4.b) Si a est une puissance de p, $\left(\frac{1}{p^\alpha}\mathbb{Z}\right)\cap\mathrm{H}\subset\frac{1}{p^{\alpha-1}}\mathbb{Z}$ et alors H est contenu dans le sous-groupe $\mathrm{G}(\alpha)$ des fractions irréductibles dont le dénominateur n'est pas divisible par p^α. En effet, si une fraction irréductible $\frac{u}{p^\alpha v}$ appartenait à H, $\frac{u}{p^\alpha}$ appartiendrait à $\left(\frac{1}{p^\alpha}\mathbb{Z}\right)\cap\mathrm{H}\subset\frac{1}{p^{\alpha-1}}\mathbb{Z}$, donc u serait divisible par p, ce qui est absurde. La partie $\mathrm{H}\cup\left\{\frac{1}{p^\alpha}\right\}$ est alors contenue dans le sous-groupe strict $\mathrm{G}(\alpha + 1)$ et n'est donc pas génératrice.