Solution de Odile Simon (La Prénessaye)

Il s'agit de déterminer, pour chaque valeur de a, entier naturel, si l'expression $A = 6(a! + 3) - 5$ est un carré parfait.

Pour $a = 1$ ou $a = 0$, on a $A = 19$, donc pas de solution.
Pour $a = 2$, on a $A = 25$, on obtient une solution : $a = 2$ et $b = 5$.
Pour $a = 3$, on a $A = 49$, on obtient une solution : $a = 3$ et $b = 7$.
Pour $a = 4$, on a $A = 157$, ce nombre n'est pas un carré, donc pas de solution.
Pour $a \geq 5$, $a!$ est multiple de 10, ainsi le nombre A se termine toujours par le chiffre 3, c'est-à-dire qu'il est égal à 3 *modulo* 10. En calculant les carrés dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, on a :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

On constate qu'aucun carré d'entier naturel n'est égal à 3 *modulo* 10. Ainsi les seules solutions de l'équation sont :

$$a = 2 \; ; \; b = 5 \text{ et } a = 3 \; ; \; b = 7.$$