Solution de Bernard Collignon (Coursan)

On se propose d'établir le résultat suivant : pour $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $\left(\dfrac{S(n)}{S(kn)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée si et seulement si k est de la forme $2^p \times 5^q$ avec p, $q \in \mathbb{N}$.

I – Premier cas : $k = 2^p \times 5^q$.

Dans cette partie, on suppose que $k = 2^p \times 5^q$ avec p, $q \in \mathbb{N}$. Si $p = q$,

$$S(kn) = S(10^p n) = S(n),$$

donc la suite $\left(\dfrac{S(n)}{S(kn)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante.

On suppose désormais $p \neq q$. La majoration de la suite $\left(\dfrac{S(n)}{S(kn)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ découle alors du lemme suivant.

Lemme 1. 1. *S'il existe a, $b > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$a \leq \frac{S(n)}{S(2n)} \leq b, \tag{1}$$

alors la suite $\left(\dfrac{S(n)}{S(kn)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\frac{1}{2} \leq \frac{S(n)}{S(2n)} \leq 5. \tag{2}$$

Preuve — L'encadrement (1) implique, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a^p \leq \frac{S(n)}{S(2n)} \times \frac{S(2n)}{S(4n)} \times \ldots \times \frac{S(2^{p-1}n)}{S(2^p n)} = \frac{S(n)}{S(2^p n)} \leq b^p.$$

Par ailleurs, on a aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{b} \leq \frac{S(2n)}{S(n)} \leq \frac{1}{a},$$

soit encore

$$\frac{1}{b} \leq \frac{S(10n)}{S(5n)} = \frac{S(n)}{S(5n)} \leq \frac{1}{a},$$

puis

$$\left(\frac{1}{b}\right)^q \leq \frac{S(n)}{S(5n)} \times \frac{S(5n)}{S(25n)} \times \ldots \times \frac{S(5^{q-1}n)}{S(5^q n)} = \frac{S(n)}{S(5^q n)} \leq \left(\frac{1}{a}\right)^q.$$

Finalement, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{a^p}{b^q} \leq \frac{S(n)}{S(2^p n)} \times \frac{S(2^p n)}{S(2^p 5^q n)} = \frac{S(n)}{S(2^p 5^q n)} \leq \frac{b^p}{a^q}, \tag{3}$$

ce qui établit le premier point.

Le second point découle de la sous-additivité de la fonction S, à savoir, pour $x, y \in \mathbb{N}^*$,

$$S(x + y) \leq S(x) + S(y).$$

Admettons ce résultat pour le moment. En prenant $x = y = n \in \mathbb{N}^*$, on obtient

$$0 < S(2n) \leq 2S(n),$$

d'où la minoration souhaitée :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{S(n)}{S(2n)}.$$

On a aussi par sous-adddivité

$$S(5n) \leq 5S(n),$$

soit encore

$$S(n) = S(10n) \leq 5S(2n),$$

d'où la majoration souhaitée,

$$\frac{S(n)}{S(2n)} \leq 5.$$

On peut noter que l'encadrement

$$\frac{1}{2} \leq \frac{S(n)}{S(2n)} \leq 5$$

est optimal puisque pour $n = 12$, $\frac{S(n)}{S(2n)} = \frac{1}{2}$ tandis que pour $n = 5$, $\frac{S(n)}{S(2n)} = 5$.

Pour être complet, il reste à établir la sous-additivité de S. Sans restreindre la généralité, on peut supposer $y \leq x$ et poser

$$x = \sum_{i=0}^{N} x_i 10^i, \quad y = \sum_{i=0}^{N} y_i 10^i$$

avec $x_i, y_i \in [[0, 9]]$ et $x_N \neq 0$. La sous-additivité résulte de la relation facile à vérifier

$$S(x + y) = S(x) + S(y) - 9r$$

où r est le nombre (≥ 0) de retenues effectuées dans l'addition terme à terme des deux sommes précédentes. Prenons par exemple

$$x = 942\ 432\ 874 \text{ et } y = 65\ 497\ 345.$$

On a alors

$$x + y = 1\ 007\ 930\ 219$$

et

$$S(x) = 43,\ S(y) = 43,\ S(x + y) = 32.$$

De plus, dans l'addition $x + y$, le nombre de retenues est $r = 6$:

retenue	1	1			1	1	1	1		
x		9	4	2	4	3	2	8	7	4
y		0	6	5	4	9	7	3	4	5
$x + y$	1	0	0	7	9	3	0	2	1	9

On a effectivement

$$S(x) + S(y) = S(x + y) + 9r.$$

II – Second cas : k possède un diviseur premier autre que 2 et 5.

On suppose désormais que k n'est pas de la forme $2^p \times 5^q$. On distingue ici deux sous-cas, selon que k est premier avec 10 ou non.

II A – Premier sous-cas : k est premier avec 10.

On fixe $k \in \mathbb{N}$ premier avec 10 et l'on va montrer que la suite $\left(\dfrac{S(n)}{S(kn)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas majorée. On commence par un lemme classique.

Lemme 2. *Tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ premier avec 10 admet un multiple dont l'écriture décimale comporte uniquement des 1. De plus, il existe un tel multiple dont l'écriture décimale comporte moins de k chiffres (au sens large).*

Preuve — Une preuve possible consiste à considérer les k entiers

$$1, 11, 111, \ldots, \underbrace{11\ldots1}_{k \text{ fois}}.$$

En prenant les restes modulo k, on obtient k valeurs dans $[[0, k-1]]$. Si l'un de ces restes est nul, le résultat est établi. Sinon, on a k restes dans $[[1, k-1]]$ donc deux des nombres considérés, disons a et b avec $a < b$, ont même reste modulo k et le nombre $b - a$ est un multiple de k. Par ailleurs, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que

$$b-a = 1\ldots10\ldots0 = 1\ldots1\times10^j.$$

Puisque k divise $b - a$ et que k est premier avec 10, k divise $1\ldots1$. Notons que, dans ce multiple de k, le nombre de 1 est inférieur ou égal à k.

On possède maintenant deux entiers d et m tels que

$$dk = \underbrace{11\ldots1}_{k \text{ fois}} \quad \text{avec } m \in [[1,k]].$$

On a donc $9dk = \underbrace{9\ldots9}_{k \text{ fois}}$. Pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, on considère les nombres

$$\mathrm{M}_x = 9dk \times \left(\sum_{i=0}^{x-1} 10^{mi}\right) = \underbrace{\underbrace{9\ldots9}_{m \text{ fois}}\ldots\underbrace{9\ldots9}_{m \text{ fois}}}_{x \text{ fois}} = 10^{mx} - 1.$$

et

$$\mathrm{N}_x = \underbrace{\underbrace{9\ldots9}_{m \text{ fois}}\ldots\underbrace{9\ldots9}_{m \text{ fois}}}_{x \text{ fois}} + \underbrace{1\ldots1}_{m \text{ fois}} = 1\ \underbrace{0\ldots0}_{m(x-1) \text{ fois}}\ \underbrace{1\ldots1}_{m\text{-}1 \text{ fois}}0 = 10^{mx} + kd - 1. \tag{4}$$

Notons que N_x est un multiple de k puisque

$$\mathrm{N}_x = k \times n_k \text{ où } n_x = d\left(9\sum_{i=0}^{x-1} 10^{mi} + 1\right).$$

L'écriture décimale de N_x en base 10 (égalité (4)) donne

$$S(k \times n_x) = m. \tag{5}$$

Par ailleurs, puisque $k \geq 2$,

$$9d < 10d < 9kd = 10^m - 1 < 10^m,$$

donc

$$\mathrm{S}(n_x) = \mathrm{S}\left(\sum_{i=0}^{x-1} 9d10^{mi} + 10d\right) = (x-1)\mathrm{S}(9d) + \mathrm{S}(d). \qquad (6)$$

Les relations (5) et (6) montrent que la suite $\left(\dfrac{\mathrm{S}(n)}{\mathrm{S}(kn)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas majorée.

Prenons l'exemple de $k = 7$ pour lequel $d = 15\ 873$, $kd = 111\ 111$ et $m = 6$. Le nombre $\mathrm{M}_x = 999\ 999 \ldots 999\ 999$ dans lequel le motif 999 999 apparaît x fois est bien un multiple de 7 et s'écrit

$$\mathrm{M}_x = 7 \times 9 \times 15\ 873 \times \sum_{i=0}^{x-1} 10^{6i}.$$

Ainsi,

$$\mathrm{N}_x = 10^{6x} + 111\ 110 = 7n_x.$$

et, comme annoncé,

$$\mathrm{S}(7n_x) = 6.$$

Par ailleurs,

$$n_x = 15\ 873\left(9\sum_{i=0}^{x-1} 10^{6i} + 1\right) = 142\ 857\sum_{i=0}^{x-1} 10^{6i} + 15\ 873,$$

donc

$$\mathrm{S}(n_x) = (x-1)\mathrm{S}(142\ 857) + \mathrm{S}(15\ 873) = 27(x-1) + 24.$$

Ainsi,

$$\frac{\mathrm{S}(n_x)}{\mathrm{S}(7n_x)} = \frac{27}{6}(x-1) + 8 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

II B – Second sous-cas : k n'est pas premier avec 10.

On fixe $k = 2^p \times 5q \times k_0$ avec p, q, $k_0 \in \mathbb{N}$, $p + q > 0$ et $k_0 \geq 3$ premier avec 10. On introduit l'entier m défini dans la partie II.A associé à k_0 ainsi que l'entier n_x pour $x \in \mathbb{N}^*$. On va montrer que

$$\frac{\mathrm{S}(2^q \times 5^p \times n_x)}{\mathrm{S}(k \times 2^q \times 5^p \times n_x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Puisque

$$\mathrm{S}(k \times 2^q \times 5^p \times n_x) = \mathrm{S}(10^{p+q} \times k_0 \times n_x) = \mathrm{S}(k_0 \times n_x) = m$$

par construction de n_x, il suffit de montrer que

$$\mathrm{S}(2^q \times 5^p \times n_x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

D'après l'encadrement (3) établi dans la partie I (les rôles de p et q étant inversés), on a avec $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 5$,

$$\frac{S(n_x)}{S(2^q \times 5^p \times n_x)} \leq \frac{5^p}{2^q},$$

donc

$$S(2^q \times 5^p \times n_x) \geq \frac{2^q}{5^p} S(n_x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty,$$

ce qui achève la résolution du problème.

III - Questions en suspens

Une question naturelle est la généralisation à une base quelconque $b \geq 2$. En notant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_b(n)$ la somme des chiffres dans l'écriture de n en base b, les entiers $k \in \mathbb{N}^*$ tels que la suite $\left(\frac{S_b(n)}{S_b(kn)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit majorée sont-ils ceux dont la factorisation ne fait apparaître que des facteurs premiers de b ?
D'autres questions intéressantes seraient par exemple de déterminer, pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$ donné,

1. la densité des entiers n tels que $\frac{S(n)}{S(kn)} = p$, p étant fixé ;
2. la limite quand N tend vers $+\infty$ des moyennes de Césaro, $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{S(n)}{S(kn)}$.