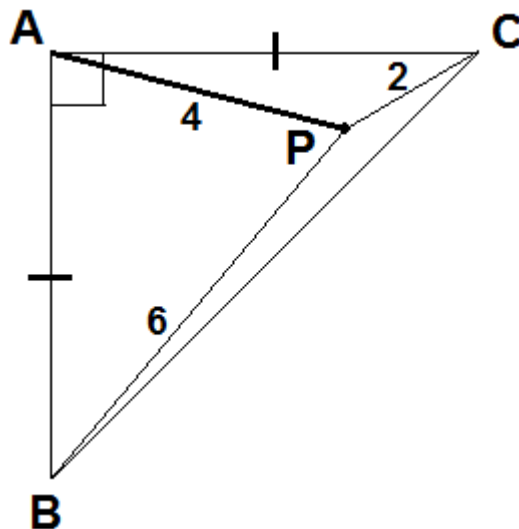


ENONCÉ 1

Soient A et P deux points du plan tels que $AP = 4$. Construire un triangle ABC rectangle et isocèle en A tel que $BP = 6$ et $CP = 2$.

Solution

On considère 2 points fixes A et P du plan tels que $[AP]$ mesure 4 cm.



Analyse :

Supposons qu'il existe 2 points B et C tels que ABC soit rectangle isocèle en A, $BP = 6$ et $CP = 2$.

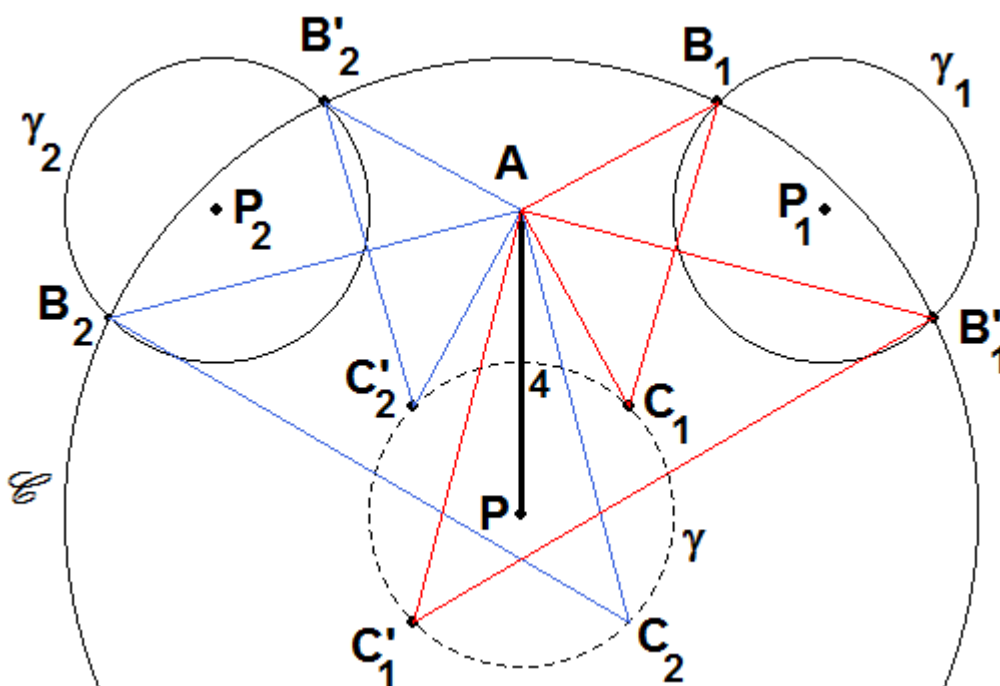
B et C appartiennent alors respectivement au cercle \mathcal{C} de centre P, de rayon 6 cm et au cercle γ de centre P de rayon 2 cm.

De plus, ABC étant rectangle isocèle en A, B est l'image de C soit par le quart de tour direct r_1 de centre A soit par le quart de tour indirect r_2 de centre A.

$C \in \gamma$ donc le point $B = r_1(C)$ appartient au cercle $\gamma_1 = r_1(\gamma)$ de centre $P_1 = r_1(P)$ et de rayon 2 cm. De même, le point $B = r_2(C)$ appartient au cercle $\gamma_2 = r_2(\gamma)$ de centre $P_2 = r_2(P)$ et de rayon 2 cm. Ainsi, $B \in \mathcal{C} \cap \gamma_1$ ou

$B \in \mathcal{C} \cap \gamma_2$.

Synthèse et construction :



Construisons d'abord les points P_1 et P_2 images respectives de P par le quart de tour direct r_1 de centre A et par le quart de tour indirect r_2 de centre A .

On trace alors le cercle γ_1 de centre P_1 et de rayon 2 cm, le cercle γ_2 de centre P_2 et de rayon 2 cm puis le cercle \mathcal{C} de centre P et de rayon 6 cm.

D'après le théorème de Pythagore appliqué aux triangles APP_1 et APP_2 rectangles isocèles en A avec $AP = 4$, on obtient $PP_1 = PP_2 = 4\sqrt{2}$. Ainsi, $4 < PP_1 < 8$ donc \mathcal{C} et γ_1 sont sécants en deux points B_1 et B_1' .

De même, $4 < PP_2 < 8$ donc \mathcal{C} et γ_2 sont sécants en deux points B_2 et B_2' .

On construit alors $C_1 = r_2(B_1)$, $C_1' = r_2(B_1')$, $C_2 = r_1(B_2)$ et $C_2' = r_1(B_2')$.

Par définition de r_2 , le triangle AB_1C_1 est rectangle et isocèle en A avec $PB_1 = 6$ (car $B_1 \in \mathcal{C}$).

De plus, $[PC_1]$ est l'image de $[P_1B_1]$ par r_2 donc $PC_1 = P_1B_1$. Or $B_1 \in \gamma_1$ donc $P_1B_1 = 2$. Dès lors, $PC_1 = 2$.

Le triangle AB_1C_1 est donc une solution au problème posé.

De même : • $AB_1'C_1'$ est rectangle et isocèle en A avec $PB_1' = 6$ (car $B_1' \in \mathcal{C}$).

$[PC_1']$ est l'image de $[P_1B_1']$ par r_2 donc $PC_1' = P_1B_1'$. Or $B_1' \in \gamma_1$ donc $P_1B_1' = 2$. Dès lors, $PC_1' = 2$.

Le triangle $AB_1'C_1'$ est donc aussi une solution au problème posé.

• AB_2C_2 est rectangle et isocèle en A avec $PB_2 = 6$ (car $B_2 \in \mathcal{C}$).

$[PC_2]$ est l'image de $[P_2B_2]$ par r_1 donc $PC_2 = P_2B_2$. Or $B_2 \in \gamma_2$ donc $P_2B_2 = 2$. Dès lors, $PC_2 = 2$.

Le triangle AB_2C_2 est donc une troisième solution au problème posé.

• $AB_2'C_2'$ est rectangle et isocèle en A avec $PB_2' = 6$ (car $B_2' \in \mathcal{C}$).

$[PC_2']$ est l'image de $[P_2B_2']$ par r_1 donc $PC_2' = P_2B_2'$. Or $B_2' \in \gamma_2$ donc $P_2B_2' = 2$. Dès lors, $PC_2' = 2$.

Le triangle $AB_2'C_2'$ est donc une quatrième solution au problème posé.

Conclusion : Le problème posé admet exactement 4 solutions.

Remarque : - Si l'on ne tient pas compte de la symétrie par rapport à (AP) , ce problème admet deux triangles solutions non isométriques: par exemple AB_1C_1 et $AB_1'C_1'$.

- En démontrant que P , P_1 , C_1 et C_1' appartiennent à la médiatrice de $[B_1B_1']$, on peut prouver que P est extérieur au triangle AB_1C_1 et que P est intérieur au triangle $AB_1'C_1'$.

- Il est aussi possible de déterminer les dimensions des deux triangles non isométriques :

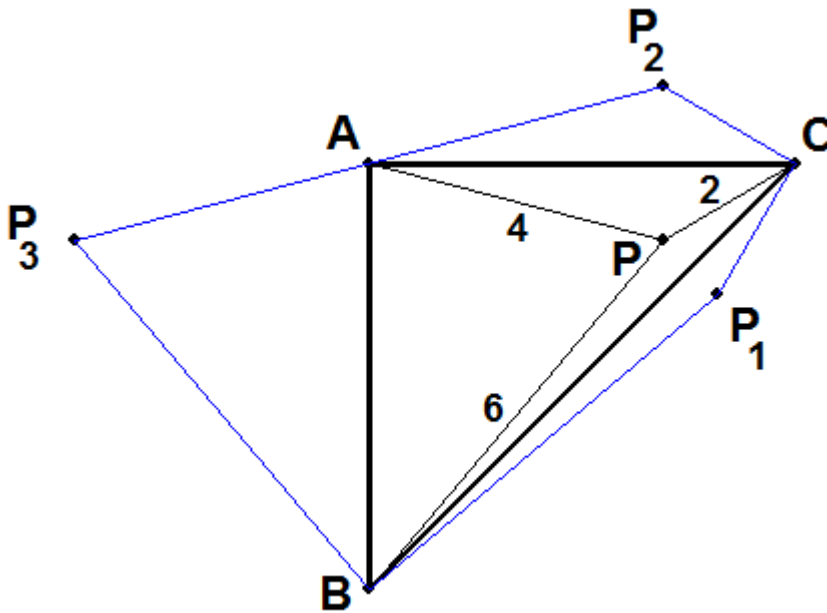
lorsque P est extérieur à ABC , on a $BC = 2\sqrt{10 - 4\sqrt{2}}$ et $AB = 2\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$,

lorsque P est intérieur à ABC , $BC = 2\sqrt{10 + 4\sqrt{2}}$ et $AB = 2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$.

ENONCÉ 2

A l'intérieur d'un triangle ABC rectangle et isocèle en A, P est le point tel que $AP = 4$, $BP = 6$ et $CP = 2$ (longueur mesurées en cm). Combien mesure l'aire du triangle ABC en cm^2 ?

Solution 1 (avec une symétrie axiale)



On considère les points P_1 , P_2 et P_3 symétriques de P respectivement par rapport à (BC) , (AC) et (AB) . Par conservation des angles géométriques par une réflexion, on a $\widehat{P_2AP_3} = 2 \times \widehat{CAB} = 180^\circ$. Les points P_2 , A et P_3 sont donc alignés avec $AP_2 = AP_3 = 4$ (par conservation des longueurs par une réflexion). Dès lors, A est le milieu de $[P_2P_3]$.

Par conservation des aires par une symétrie axiale, on a alors $\text{Aire}(BP_1CP_2P_3) = 2 \times \text{Aire}(ABC)$. Or, $\text{Aire}(BP_1CP_2P_3) = \text{Aire}(CP_1P_2) + \text{Aire}(P_1P_2P_3) + \text{Aire}(BP_1P_3)$.

On en déduit que $\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2} [\text{Aire}(CP_1P_2) + \text{Aire}(P_1P_2P_3) + \text{Aire}(BP_1P_3)]$. (E)

De plus, par conservation des angles géométriques par une réflexion, $\widehat{P_1CP_2} = 2 \widehat{BCA}$ et $\widehat{P_1BP_3} = 2 \widehat{CBA}$. Ainsi, $\widehat{P_1CP_2} = \widehat{P_1BP_3} = 90^\circ$. Avec la conservation des longueurs par une réflexion, on obtient ensuite que P_1CP_2 et P_1BP_3 sont deux triangles rectangles et isocèles respectivement en C et B.

Dès lors, $\text{Aire}(CP_1P_2) = \frac{CP_1^2}{2} = \frac{CP^2}{2} = 2$ et $\text{Aire}(BP_1P_3) = \frac{BP_1^2}{2} = \frac{BP^2}{2} = 18$.

Avec le théorème de Pythagore appliqué aux triangles CP_1P_2 et BP_1P_3 , $P_1P_2^2 = 8$ et $P_1P_3^2 = 72$.

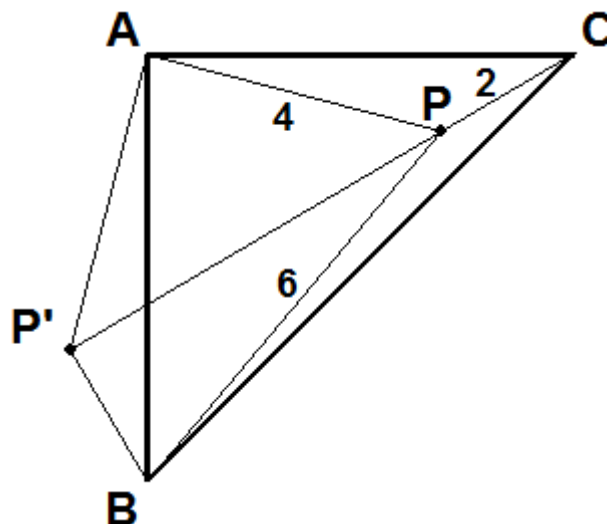
Or, $P_2P_3 = 2AP_2 = 2AP = 8$ d'où $P_2P_3^2 = 64$.

Ainsi, $P_2P_3^2 + P_1P_2^2 = P_1P_3^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, $P_1P_2P_3$ est rectangle en P_2 .

On obtient donc $\text{Aire}(P_1P_2P_3) = \frac{P_1P_2 \times P_2P_3}{2} = \frac{\sqrt{8} \times 8}{2} = 8\sqrt{2}$.

Enfin, avec l'égalité (E), on obtient $\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2} (2 + 8\sqrt{2} + 18) = 10 + 4\sqrt{2}$.

Solution 2 (avec une rotation)



On construit le point P' image de P par le quart de tour r de centre A qui transforme C en B .

Par conservation de l'aire par une rotation, on a $\text{aire}(APC) = \text{aire}(AP'B)$. Or, $\text{aire}(ABPC) = \text{aire}(ABP) + \text{aire}(APC)$ et $\text{aire}(ABP) + \text{aire}(AP'B) = \text{aire}(APBP')$. On obtient donc $\text{aire}(ABPC) = \text{aire}(APBP')$.

De plus, $\text{aire}(APBP') = \text{aire}(APP') + \text{aire}(PP'B)$ avec $\text{aire}(APP') = \frac{4 \times 4}{2} = 8$.

D'après le théorème de Pythagore appliqué à APP' , on a alors $PP' = 4\sqrt{2}$.

Par conservation des longueurs par une rotation, $PC = P'B$. Ainsi, $P'B = 2$.

Par ailleurs, $PP'^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32$, $P'B^2 = 4$ et $PB^2 = 6^2 = 36$. Dès lors, $PP'^2 + P'B^2 = PB^2$ et d'après la

réciproque du théorème de Pythagore, $PP'B$ est rectangle en P' . On en déduit que $\text{aire}(PP'B) = \frac{PP' \times P'B}{2}$

$$= \frac{4\sqrt{2} \times 2}{2} = 4\sqrt{2}.$$

On obtient donc $\text{aire}(APBP') = 8 + 4\sqrt{2} = \text{aire}(ABPC)$.

De plus, un quart de tour transforme une droite en une droite perpendiculaire donc $(PC) \perp (P'B)$.

Comme $PP'B$ est rectangle en P' , $(PP') \perp (P'B)$. Les droites (PC) et (PP') étant perpendiculaires à $(P'B)$, elles sont parallèles, avec P pour point commun ; elles sont donc confondues. Ainsi, $P' \in (PC)$ et $(PC) \perp$

$(P'B)$ donc $[BP']$ est la hauteur issue de B du triangle BPC . On a donc $\text{aire}(BPC) = \frac{PC \times BP'}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$.

Finalement, $\text{aire}(ABC) = \text{aire}(ABPC) + \text{aire}(BPC) = 8 + 4\sqrt{2} + 2 = \mathbf{10 + 4\sqrt{2}}$.

Remarque : Cette solution donne une méthode de construction de A , B , C et P plus simple que celle présentée à l'exercice 1.

On trace d'abord un triangle APP' rectangle isocèle en A tel que $AP = 4$.

Ensuite, on peut par exemple construire C tel que $C \in [P'P] \setminus [P'P]$ et $PC = 2$.

On termine alors en construisant B de sorte que ABC soit rectangle et isocèle en A , avec P intérieur à ABC .

Solution 3 (avec les coordonnées barycentriques)

P est à l'intérieur du triangle ABC donc $P = \text{bar}\{(A ; \text{aire}(\text{PBC})) ; (B ; \text{aire}(\text{PAC})) ; (C ; \text{aire}(\text{PAB}))\}$

On pose $x = \text{aire}(\text{PBC})$, $y = \text{aire}(\text{PAC})$ et $z = \text{aire}(\text{PAB})$

On a donc : $x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC} = \vec{0}$. On en déduit les 3 égalités suivantes :

$$(x + y + z)\overrightarrow{AP} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$$

$$(x + y + z)\overrightarrow{BP} = x\overrightarrow{BA} + z\overrightarrow{BC}$$

$$(x + y + z)\overrightarrow{CP} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB} \text{ avec } x + y + z = \text{aire}(\text{ABC}) = \frac{b^2}{2} \text{ en posant } b = AC = AB$$

On élève alors au carré chaque membre de ces égalités puis on développe, avec $AP = 4$, $BP = 6$ et $CP = 2$.

$$\text{On obtient : } \frac{b^2}{2} \times \frac{b^2}{2} \times 4^2 = y^2 \times b^2 + z^2 \times b^2 \text{ car } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

$$\frac{b^2}{2} \times \frac{b^2}{2} \times 6^2 = x^2 b^2 + 2xz \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + z^2 b^2 \text{ où } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 \text{ et } BC = b\sqrt{2}$$

$$\frac{b^2}{2} \times \frac{b^2}{2} \times 2^2 = x^2 b^2 + 2xy \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + y^2 b^2 \text{ où } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = b^2$$

Dès lors, après simplification de chaque égalité par b^2 , on a le système suivant :

$$\begin{cases} 4b^2 = y^2 + z^2 \\ 9b^2 = x^2 + 2xz + 2z^2 \\ b^2 = x^2 + 2xy + 2y^2 \\ x + y + z = \frac{b^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 = 4b^2 \\ (x+z)^2 - z^2 + 2z^2 = 9b^2 \\ (x+y)^2 - y^2 + 2y^2 = b^2 \\ x + y + z = \frac{b^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 = 4b^2 \\ \left(\frac{b^2}{2} - y\right)^2 + z^2 = 9b^2 \\ \left(\frac{b^2}{2} - z\right)^2 + y^2 = b^2 \\ x + y + z = \frac{b^2}{2} \end{cases} \quad (\text{E})$$

Les 3 premières équations forment un sous-système d'inconnues b , y et z :

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 4b^2 \\ y^2 + z^2 - b^2 y + \frac{b^4}{4} = 9b^2 \\ y^2 + z^2 - b^2 z + \frac{b^4}{4} = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 = 4b^2 \\ 4b^2 + \frac{b^4}{4} - b^2 y = 9b^2 \\ 4b^2 + \frac{b^4}{4} - b^2 z = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 = 4b^2 \\ 4 + \frac{b^2}{4} - y = 9 \\ 4 + \frac{b^2}{4} - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 = 4b^2 \\ z - y = 8 \\ b^2 = 4(z - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (z - 8)^2 + z^2 = 16(z - 3) \\ y = z - 8 \\ b^2 = 4(z - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z^2 - 32z + 112 = 0 \\ y = z - 8 \\ b^2 = 4(z - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 8 + 2\sqrt{2} \text{ ou } z = 8 - 2\sqrt{2} \\ y = z - 8 \\ b^2 = 4(z - 3) \end{cases}$$

Avec $z = 8 - 2\sqrt{2}$, on a $y = z - 8 = -2\sqrt{2}$ donc $y < 0$. Or $y > 0$. La valeur $z = 8 - 2\sqrt{2}$ est donc à exclure.

Avec $z = 8 + 2\sqrt{2}$, $b^2 = 4(z - 3) = 4(5 + 2\sqrt{2})$. Dès lors, (E) donne $x + y + z = \frac{b^2}{2} = 2(5 + 2\sqrt{2})$.

Finalement, $\text{aire}(\text{ABC}) = 10 + 4\sqrt{2}$.

Remarque :

Le seul avantage de cette méthode est qu'elle permet de connaître simplement l'aire des 3 triangles de sommet P.

$$z = 8 + 2\sqrt{2} = \text{aire}(\text{PAB}),$$

$$y = 2\sqrt{2} = \text{aire}(\text{PAC}),$$

$$\text{et } x = \text{aire}(\text{ABC}) - y - z = 2 + 4\sqrt{2} - 2 = 2 = \text{aire}(\text{PBC}) \text{ (valeur déjà obtenue avec la solution 2)}$$

Solution 4 (avec les coordonnées cartésiennes, bien sûr)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(A ; \vec{i} ; \vec{j})$, on considère $B(b ; 0)$, $C(0 ; b)$ et $P(x ; y)$ avec : $AP = 4$, $CP = 2$ et $BP = 6$. Sans perte de généralité, on peut choisir $b > 0$ ce qui conduit à $x > 0$ et $y > 0$ puisque P est intérieur à ABC .

L'aire du triangle ABC est alors égale à $\frac{b^2}{2}$.

Les 3 égalités précédentes se traduisent par le système
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 + (y - b)^2 = 4 \\ (x - b)^2 + y^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 16 - 2by + b^2 = 4 \\ 16 - 2bx + b^2 = 36 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = \frac{b^2 + 12}{2b} \\ x = \frac{b^2 - 20}{2b} \end{cases}.$$

Dès lors, $\left(\frac{b^2 + 12}{2b}\right)^2 + \left(\frac{b^2 - 20}{2b}\right)^2 = 16 \Leftrightarrow 2b^4 - 80b^2 + 544 = 0 \Leftrightarrow b^4 - 40b^2 + 272 = 0$.

Avec $\Delta' = 128$, on obtient $b^2 = 20 + 8\sqrt{2}$ ou $b^2 = 20 - 8\sqrt{2}$.

1^{er} cas : $b^2 = 20 - 8\sqrt{2}$. On a alors $b^2 - 20 < 0$, $b > 0$, et $x = \frac{b^2 - 20}{2b}$ d'où $x < 0$ ce qui est exclu.

Ce cas conduirait à un point P extérieur au triangle ABC .

2^{ème} cas : $b^2 = 20 + 8\sqrt{2}$. Comme $b > 0$, on a bien $x > 0$ et $y > 0$.

$$\frac{b^2}{2} = 10 + 4\sqrt{2}.$$

Finalement, on obtient $\text{aire}(ABC) = 10 + 4\sqrt{2}$.