

Solution de Jean-Yves LeCadre (Saint Avé)

a) Posons $E(u_0) = k$. Quelques termes suggèrent que pour tout n ,

$$u_n = u_0 + k \left[(1+p)^n - 1 \right]$$

qui est vrai pour $n = 0$.

Supposons le au rang n . Alors,

$$u_{n+1} = u_n + pE(u_n).$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$E(u_n) = E(u_0) + k \left[(1+p)^n - 1 \right]$$

car $k \left[(1+p)^n - 1 \right]$ est entier. Donc $E(u_n) = k(1+p)^n$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_0 + k \left[(1+p)^n - 1 \right] + pk(1+p)^n \\ &= u_0 + k \left[(1+p)^n - 1 + p(1+p)^n \right] \\ &= u_0 + k \left[(1+p)^{n+1} - 1 \right] \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout n ,

$$u_n = u_0 + E(u_0) \left[(1+p)^n - 1 \right].$$

b) Les u_n sont entiers et alternent pairs et impairs. Montrons par récurrence que pour tout n ,

$$u_{2n} = 2 + 4n,$$

qui est vrai pour $n = 0$. Supposons-le au rang n . Alors,

$$u_{2n+1} = 2 + 4n + 2 - 1 = 3 + 4n,$$

et

$$u_{2(n+1)} = 3 + 4n + 2 + 1 = 2 + 4(n+1).$$

Pour tout n , on a donc bien $u_{2n} = 2 + 4n$.

On en déduit alors que pour tout n , $u_{2n+1} = 3 + 4n$ est aussi vrai.

c) 1) Supposons u_0 pair.

Si p est pair, tous les u_n sont pairs : la suite est arithmétique et pour tout n ,

$$u_n = u_0 + np.$$

Si p est impair,

si q est pair, tous les u_n à partir de u_1 sont impairs. La suite à partir de u_1 est arithmétique de raison q . Donc pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = u_0 + p + (n - 1)q.$$

Si q est impair, la suite alterne pairs et impairs. Supposons u_{2n} pair, ce qui est vrai pour u_0 . Alors

$$u_{2n+1} = u_{2n} + p$$

et

$$u_{2(n+1)} = u_{2n} + p + q,$$

qui est pair. La suite des u_{2n} est arithmétique, donc pour tout n :

$$u_{2n} = u_0 + n(p + q)$$

et, u_0 et $p + q$ étant pairs, pour tout n ,

$$u_{2n+1} = u_0 + (n + 1)p + nq.$$

2) Si u_0 est impair, les parités changent, et il suffit de permuter p et q pour obtenir les formules correspondantes ; à savoir successivement

$$u_n = u_0 + nq,$$

$$u_n = u_0 + q + (n - 1)p,$$

etc.

Autres solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Jean-Claude Carréga (Lyon), Robert Bourdon (Tourgeville), Frédéric de Lig (Montguyon), Éric Oswald (Borgo).