La méthode telle qu’elle est décrite par Newton

Comme il est dit dans l’introduction, le manuscrit en latin (la langue des savants à l’époque) a été achevé en 1671, mais Newton a différé sa parution, à cause des critiques qu’il subissait de toute part. Une première tentative de parution a eu lieu en 1704, année où Newton confie son manuscrit à Pemberton et lui donne son consentement pour une publication. On ne sait pas pourquoi cette démarche n’a pas abouti. Ce n’est qu’en 1736 que Colson, qui a étudié de près le travail de Newton et rédigé d’abondants commentaires, fait paraitre ***The method of fluxions, and infinite series***, alors que Newton est décédé le 31 mars 1727 à l’âge de 84 ans. L’ouvrage de 374 pages comporte une préface (24 pages), le texte de Newton (134 pages) et les commentaires de Colson (216 pages).

Cette publication en anglais, alors que le texte original est en latin, s'explique par le fait que Colson a dû d'abord traduire le manuscrit dans sa langue maternelle, tout en rédigeant d'abondants commentaires. Il a renoncé à traduire ceux-ci en latin car il lui était plus commode de publier l'ensemble en anglais.

Dès sa parution, à cause de son succès, Buffon se lancera dans une traduction en français qui paraîtra en 1740. Dans sa préface, Buffon rappelle les raisons, invoquées par Newton lui-même, de sa réticence à donner son manuscrit à un éditeur, ce qui a eu comme conséquence la publication posthume de son ouvrage. Le passage de cette préface où Newton donne cette explication est reproduit ci-dessous (en latin) :

> *Et ſubortæ ſtatim (per diverſorum Epiſtolas objectionibus refertas) crebræ interpellationes me prorſus à concilio deterruerunt & effecerunt ut me arguerem imprudentiæ quod umbram captando, eatenus perdideram quietem meam rem prorſus ſubſtantialem.* Il ſemble

dont la traduction est la suivante:

« Des empêchements fréquents produits (par des lettres d'opposants pleines d'objections) me dissuadèrent absolument de toute publication, car je risquais alors de perdre ma tranquillité, chose absolument essentielle pour moi »

La méthode de Newton est exposée dans les pages 5-6 et 7 et les commentaires de Colson, sur ce paragraphe, sont en pages 185-186 et 187.

On a reproduit, ci-dessous, le passage de la page 6 concernant la résolution approchée d'une équation numérique[(5)] :

> 20. Let this Equation $y^3 - 2y - 5 = 0$ be propoſed to be reſolved, and let 2 be a Number (any how found) which differs from the true Root leſs than by a tenth part of itſelf. Then I make $2 + p = y$, and ſubſtitute $2 + p$ for y in the given Equation, by which is produced a new Equation $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, whoſe Root is to be ſought for, that it may be added to the Quote. Thus rejecting $p^3 + 6p^2$ becauſe of its ſmallneſs, the remaining Equation $10p - 1 = 0$, or $p = 0{,}1$, will approach very near to the truth. Therefore I write this in the Quote, and ſuppoſe $0{,}1 + q = p$, and ſubſtitute this fictitious Value of p as before, which produces $q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0$. And ſince $11{,}23q + 0{,}061 = 0$ is near the truth, or $q = -0{,}0054$ nearly, (that is, dividing 0,061 by 11,23, till ſo many Figures ariſe as there are places between the firſt Figures of this, and of the principal Quote excluſively, as here there are two places between 2 and 0,005) I write $-0{,}0054$ in the lower part of the Quote, as being negative; and ſuppoſing $-0{,}0054 + r = q$, I ſubſtitute this as before. And thus I continue the Operation as far as I pleaſe, in the manner of the following Diagram :

(5) Les extraits du texte de Newton (pages 5, 6 et 7) et les commentaires de Colson (pages 185, 186 et 187) sont disponibles sur le site de la régionale APMEP d'Aix-Marseille.

On peut noter que l'équation étudiée par Newton, pour exposer sa méthode de résolution, est la suivante :

$$y^3 - 2y - 5 = 0 \qquad (1)$$

Dans la version anglaise, on pouvait avoir des doutes sur le degré de l'équation (car l'exposant est illisible), par contre le degré apparait clairement dans la traduction par M. le marquis de Buffon, intendant des jardins du Roy :

> XX. Soit l'Equation $y^3 - 2y - 5 = 0$ à reduire en ſuite infinie, prenez un Nombre comme 2, qui ne differe pas d'une de ſes dixiemes Parties de la vraie valeur de la Racine, & faites $2 + p = y$, ſubſtituez $2 + p$ pour y dans l'Equation donnée, & vous aurez $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, dont il faut chercher la Racine pour l'ajoûter au Quotient; rejettez $p^3 + 6p^2$ à cauſe de ſa petiteſſe, il reſtera $10p - 1 = 0$, ou $p = 0{,}1$, ce qui eſt très-près de la vraie valeur de p; c'eſt pourquoi l'écrivant au Quotient, je fais $0{,}1 + q = p$, & ſubſtituant comme auparavant, j'ai $q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0$, négligeant les deux premiers Termes, il reſte $11{,}23q + 0{,}061 = 0$, ou $q = -0{,}0054$ à peu près (& cela en diviſant 0,061 par 11,23 juſqu'à ce qu'on ait autant de Figures qu'il y a de places entre les premieres Figures de ce Quotient & le principal Quotient excluſivement, comme ici où il a deux places entre 2 & 0,005) J'écris donc $-0{,}0054$ dans le Quotient, mais au-deſſous parce que ce Terme eſt Négatif; & ſuppoſant $-0{,}0054 + r = q$, je ſubſtitue comme auparavant, & je continue ainſi l'Opération auſſi long-tems qu'il convient, comme on le peut voir ci-deſſous.

Il faut signaler que les figures 1, 2, 3 et 4 ont été réalisées avec la fonction $f(t) = t^3 - 2t - 5$. Par contre, la valeur initiale u_0 n'a pas été prise égale à 2, comme chez Newton. Le dessin a été réalisé avec $u_0 = 1{,}6$ pour des raisons de lisibilité.

Il est très facile de se convaincre de l'efficacité de la méthode employée par Newton pour résoudre cette équation, en prenant conscience que le résultat donné au bas de la page 7 :

> the Quote to the Period required. Then ſubtracting the negative part of the Quote from the affirmative part, there ariſes 2,09455148 for the Root of the propoſed Equation.

est bien la valeur approchée par défaut, à 10^{-8} près, de l'unique racine de l'équation (1).

On peut, par exemple, le vérifier en calculant $f(2.09455148)$ et $f(2.09455149)$ avec l'instrument de son choix et en constatant qu'ils sont de signes contraires.

Ce qui est remarquable, c'est que ce résultat est obtenu par une demi-page, seulement, de calculs (à la main). Cet exemple met en évidence la rapidité « phénoménale » de convergence de la méthode.

Pour comprendre la démarche de Newton suivons le texte pas à pas:

… prenez un Nombre 2, qui ne diffère pas d'une de ses dixièmes Parties de la vraie valeur de la Racine…

Sans doute, Newton calcule $f(2) = -1$ et $f(2,1) = 0,061$ pour obtenir cet encadrement de la racine.

… & faites $2 + p = y$, substituez $2 + p$ pour y dans l'Equation donnée, & vous aurez …

Évidemment, la détermination de p est un problème aussi difficile à résoudre que la recherche de la valeur exacte de α (solution de l'équation), puisque, en reportant $2 + p = y$ dans l'équation (1) on est conduit à résoudre l'équation :

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0 \tag{2}$$

… rejetez $p^3 + 6p^2$ à cause de sa petitesse …

c'est-à-dire en supprimant dans (2) les termes contenant p^2 et p^3 et en résolvant l'équation $10p - 1 = 0$ (qui résulte de cette linéarisation du problème), Newton obtient $p = 0,1$.

La valeur $2 + p = 2,1$ est alors une valeur approchée par excès, qui comme le dit Newton « *est très près de la vraie valeur* ».

Newton pose alors $0,1 + q = p$ et substitue cette valeur dans l'équation (2), et obtient l'équation

$$q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0 \tag{3}$$

puis en négligeant les termes contenant q^2 et q^3, il obtient une équation du premier degré en q :

$$11,23q + 0,061 = 0 \tag{4}$$

dont la solution exacte est $q = -\dfrac{0,061}{11,23}$ et dont il prend une valeur approchée $\tilde{q} = -0,0054$ alors que ce quotient vaut : –0,0054318789…

Enfin en posant :

$$-0,0054 + r = q \tag{5}$$

et par un report dans (3) puis par linéarisation de l'équation du troisième degré, Newton obtient la valeur de r.

Il donne à la fin le résultat : $y = 2 + p + q + r = 2,09455148$ qu'il ne faut pas prendre comme la valeur exacte de α mais comme une valeur approchée (sous-entendu à 10^{-8} près) sans que ce point soit justifié.

Par contre les calculs (à la main) pour obtenir ce résultat sont relativement brefs et on ne peut qu'admirer la disposition des calculs faits par Newton.

$y^3 - 2y - 5 = 0$	$+2,10000000$ $-0,00544852$ $+2,09455148$, &c. $= y$
$2 + p = y.$ $\quad +y^3$ $-2y$ -5	$+8 + 12p + 6p^2 + p^3$ $-4 - 2p$ -5
The Sum	$-1 + 10p + 6p^2 + p^3$
$0,1 + q = p.$ $\quad +p^3$ $+6p^2$ $+10p$ -1	$+0,001 + 0,03q + 0,3q^2 + q^3$ $+0,06 + 1,2 + 6,$ $+1, + 10,$ $-1,$
The Sum	$0,061 + 11,23q + 6,3q^2 + q^3$
$-0,0054 + r = q.$ $\quad q^3$ $+6,3q^2$ $+11,23q$ $+0,061$	$-0,000000157464 + 0,00008748r - 0,0162r^2 + r^3$ $+0,000183708 - 0,06804 + 6,3$ $-0,060642 + 11,23$ $+0,061$
The Sum	$+0,0005416 + 11,162r$
$-0,00004852 + s = r.$	

Toutefois, les ratures que l'on trouve à la fin de la détermination de r font planer un doute sur la validité du résultat.

Un examen approfondi du document ci-dessus montre que le cartouche qui correspond à la détermination de r est à revoir ; ceci est très facile avec nos moyens de calculs actuels.

Il semble que Newton, dans un souci de simplification des calculs, ait retenu, dans un premier temps, comme valeur approchée de q la valeur –0.0054 alors que sa valeur exacte est $-\dfrac{0{,}061}{11{,}23}$ et qu'une valeur approchée à 10^{-9} près est : –0,005431879.

Si on prend $q = -0.0054183$, l'avant-dernière ligne (correspondant à la détermination de r) peut être remplacée par :

$$+0{,}00018572 + 11{,}1616468\ r,$$

ce qui donne : $r = -\dfrac{0{,}000186602}{11{,}161648} \simeq -0{,}000016718$, puis :

$$y = 2 + 0{,}1 - 0{,}00543188 - 0{,}00001664 = 2{,}09455148.$$

On peut reconstituer le dernier cartouche (celui qui permet la détermination de r) , en prenant comme valeur approchée de q la valeur –0,0054183.

$-0{,}0054183 + r = q. \quad q^3$	$-0{,}000000162 + 0{,}00088513\,r - 0{,}0162954\,r^2 + r^3$
$+\ 6{,}3\ q^2$	$+0{,}00018588 \ -\ 0{,}06844068\,r + 6{,}23 \quad r^2$
$+\ 11{,}23\,q$	$-0{,}06099911 \ +11{,}23 \quad r$
$+\ 0{,}061$	$+0{,}061$
The Sum	$+0{,}000186603 \ +11{,}161648 \quad r$
$-0{,}00001672 + s = r$	

Newton avait prévu avec l'égalité $-0{,}00001672 + s = r$ une nouvelle étape avec la détermination de s, mais ce dernier calcul s'est avéré inutile.