

# Triangles, parallélogrammes et polygones

Pierre Legrand(\*)

*Cet article vient à la suite de celui intitulé « Triangles et parallélogrammes » paru dans le Bulletin n° 496, mais il peut être lu indépendamment. Il ne fait appel qu'aux connaissances du lycée.*

*Il s'agit dans cette étude, étant donné un polygone convexe, de voir si on peut l'inclure dans un parallélogramme ou un triangle d'aire au plus double de la sienne ou y inclure un parallélogramme ou un triangle d'aire au moins égale à la moitié de la sienne.*

Dans tout ce qui suit, les mots « triangle », « parallélogramme », « polygone » désignent la portion de plan ainsi délimitée, pourtour compris.

## 1. Parallélogrammes contenant un polygone convexe

### *Théorème 1*

*Pour tout polygone convexe, on peut trouver un rectangle le contenant dont l'aire soit au plus double.*

Soit un polygone convexe  $\Pi$ . On considère deux sommets A et B du polygone aussi éloignés l'un de l'autre que possible, c'est-à-dire tels que AB soit au moins égale à chacune des distances mutuelles des sommets de  $\Pi$ .

Soit  $\Delta$  et  $\Delta'$  respectivement les perpendiculaires menées de A et B à (AB). Tous les autres sommets sont dans la bande comprise entre  $\Delta$  et  $\Delta'$ , car ils appartiennent à l'intersection du disque fermé de centre A et de rayon AB et du disque fermé de centre B et de rayon AB.

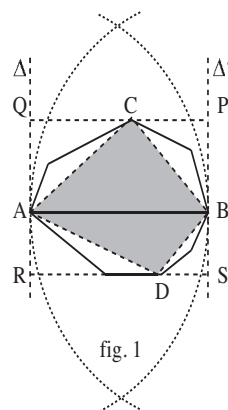
De chaque côté de (AB) on prend le sommet le plus éloigné de la droite (AB) ; appelons-les C et D (si [AB] est un côté de  $\Pi$ , l'un des deux n'existe pas, mais cela ne change rien à la démonstration). Les parallèles à (AB) menées de C et D déterminent avec  $\Delta$  et  $\Delta'$  un rectangle PQRS.

Par construction, ce rectangle contient tous les sommets de  $\Pi$ , donc il contient  $\Pi$ . Son aire est double de celle du quadrilatère ADCB (comparer les aires de ACB et ABPQ, puis celles de ADB et ABSR).

Mais ADCB est inclus dans  $\Pi$ . Donc l'aire de PQRS est au plus double de celle de  $\Pi$ .

### *Théorème 1 bis*

*Pour tout polygone convexe, on peut trouver un parallélogramme le contenant dont l'aire soit au plus double et dont deux côtés aient une direction imposée.*



(\*) p.m.legrand@sfr.fr

Il suffit de modifier légèrement le raisonnement précédent. Considérons la direction imposée comme verticale ; soit  $A$  le sommet (ou l'un des sommets) du polygone  $\Pi$  situé le plus à gauche et  $B$  le sommet le plus à droite, et soient  $\Delta$  et  $\Delta'$  les verticales issues respectivement de  $A$  et  $B$ . De chaque côté de  $(AB)$  on prend le sommet le plus éloigné de la droite  $(AB)$  ; appelons-les  $C$  et  $D$ . Les parallèles à  $(AB)$  menées de  $C$  et  $D$  déterminent avec  $\Delta$  et  $\Delta'$  un parallélogramme  $PQRS$  contenant  $\Pi$ . L'aire de ce parallélogramme est double de celle du quadrilatère  $ADBC$  (même justification que plus haut), donc au plus double de celle de  $\Pi$ .

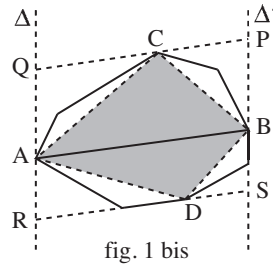


fig. 1 bis

## 2. Parallélogrammes inclus dans un polygone convexe

### *Théorème 2*

*Dans tout polygone convexe on peut inclure un parallélogramme dont l'aire soit au moins la moitié de la sienne.*

Si le polygone  $\Pi$  est un quadrilatère, on voit immédiatement que les milieux des côtés de  $\Pi$  forment un parallélogramme répondant à la question (l'exercice est classique au collège : il suffit de tracer une des diagonales de  $\Pi$  pour constater que l'aire de ce parallélogramme est exactement la moitié de celle de  $\Pi$ ).

Dans le cas général, il va falloir ruser un peu pour adapter cette idée. On reprend les notations utilisées dans l'étude du théorème 1. On considère deux sommets  $A$  et  $B$  du polygone à distance maximale l'un de l'autre.  $\Pi$  est tout entier compris entre les perpendiculaires  $\Delta$  et  $\Delta'$  menées de  $A$  et  $B$  à  $(AB)$ . De chaque côté de  $(AB)$  on prend le sommet le plus éloigné de la droite  $(AB)$  ; appelons-les encore  $C$  et  $D$ . Appelons  $a$  la distance  $AB$ ,  $h$  et  $h'$  les distances respectives de  $C$  et  $D$  à la droite  $(AB)$ .

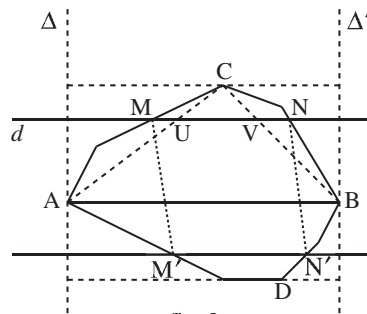


fig. 2

Nous allons construire un parallélogramme inclus dans  $\Pi$  dont deux côtés sont parallèles à  $[AB]$  et de longueur moitié. Considérons (figure 2) une parallèle  $d$  à  $(AB)$  située du côté de  $C$ , située à la distance  $x$  de  $(AB)$  et coupant  $\Pi$  selon un segment  $[MN]$ . Quand  $x$  varie de 0 à  $h$ , la longueur  $MN$ , fonction continue de  $x$  puisque différence de deux fonctions affines par morceaux, prend au moins une fois<sup>(1)</sup> toute valeur comprise entre 0 et  $a$ .

On choisit désormais  $x$  tel que  $MN = \frac{a}{2}$ . La droite  $d$  correspondante coupe  $\Pi$  selon  $[MN]$  et le triangle  $ABC$  selon un segment  $[UV]$  inclus dans  $[MN]$ . On a donc

(1) En fait une fois et une seule, mais on n'en a pas besoin.

$\frac{UV}{AB} \leq \frac{1}{2}$ . Or, d'après le théorème de Thalès,  $\frac{UV}{AB} = \frac{h-x}{h}$ . Finalement  $\frac{h-x}{h} \leq \frac{1}{2}$ ,

c'est-à-dire  $x \geq \frac{1}{2}h$ .

En travaillant maintenant du côté de D, on construit de même un segment  $[M'N']$  de longueur  $\frac{a}{2}$  inclus dans  $\Pi$ , parallèle à  $(AB)$  et situé à une distance  $x'$  de  $(AB)$ , avec

$x' \geq \frac{1}{2}h'$ . Finalement, nous disposons donc d'un parallélogramme  $MNN'M'$  inclus

dans  $\Pi$  et d'aire  $\frac{1}{2}a(x+x')$ .

Reste à majorer l'aire de  $\Pi$  en fonction de  $a$ ,  $x$ ,  $x'$ . Majorons d'abord l'aire de la partie  $\Pi_+$  de  $\Pi$  située par rapport à  $(AB)$  du côté de C. La parallèle à  $(AB)$  issue de C, sa symétrique  $(KL)$  par rapport à  $d$ , le côté de  $\Pi$  passant par M (ou l'un des côtés si M est un sommet) et le côté de  $\Pi$  passant par N déterminent un trapèze T (SPQC sur la figure 3). L'aire de ce trapèze<sup>(2)</sup> est  $MN \times 2(h-x) = a(h-x)$ .

$\Pi_+$  est inclus dans la réunion de T et du rectangle ABLK (région en gris sur la figure 3). L'aire de ce rectangle est  $a(h-2(h-x))$ , soit  $a(2x-h)$ .

Il en résulte que l'aire de  $\Pi_+$  est au plus égale à  $a(h-x) + a(2x-h)$ , c'est-à-dire  $ax$ . Au total, l'aire de  $\Pi$  est au plus égale à  $a(x+x')$  c'est-à-dire au double de l'aire du parallélogramme  $MNN'M'$ .

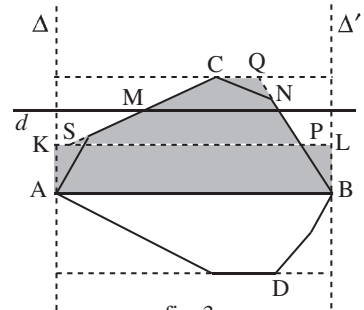


fig. 3

### 3. Triangles inclus dans un polygone convexe

On pourrait penser qu'à l'image de ce qu'on vient de prouver pour les parallélogrammes, on peut inclure dans un polygone convexe donné  $\Pi$  d'aire  $S$  un triangle d'aire au moins égale à  $\frac{1}{2}S$ . Nous allons voir que ce n'est pas forcément le cas. En revanche, nous allons donner une méthode pour fabriquer un triangle d'aire maximum inclus dans  $\Pi$ .

#### Lemme 1

*Si un triangle inclus dans un polygone convexe a au moins un sommet intérieur au polygone, il existe un triangle d'aire strictement plus grande dont les trois sommets sont sur le pourtour du polygone.*

(2) Nous utilisons ici un résultat bien connu : l'aire d'un trapèze est égale au produit de sa hauteur par la longueur du segment joignant les milieux des deux côtés obliques. Ce résultat sera utilisé à nouveau dans la démonstration du théorème 5.

Soit donc un triangle  $MNP$  inclus dans le polygone convexe  $ABCDEFG$  ; on suppose que le point  $M$  est intérieur au polygone. La droite  $(MN)$  coupe ce dernier selon un segment  $[M'N']$  contenant strictement  $[MN]$ . Donc  $\text{aire } MNP < \text{aire } M'N'P$ .

Il reste à recommencer une opération analogue pour remplacer le point  $P$  par un point  $P'$  convenable situé lui aussi sur le bord du polygone (voir figure 4) pour obtenir un triangle  $M'N'P'$  d'aire encore plus grande.

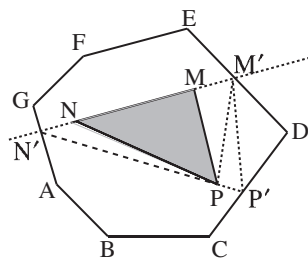


fig. 4

### Lemme 2

Étant donné un triangle dont les trois sommets sont sur le pourtour d'un polygone convexe, il existe un triangle d'aire au moins égale dont les trois sommets sont des sommets du polygone.

Soit donc  $M, N, P$  trois points du pourtour du polygone. Supposons que le point  $P$  ne soit pas un sommet du polygone ; il est sur un côté  $]UV[$ .

Si ce côté n'est pas parallèle à  $[MN]$ , l'un des deux points  $U$  et  $V$ , mettons  $V$ , est plus éloigné de la droite  $(MN)$  que  $P$ . Alors le triangle  $MNV$  a une aire supérieure à celle de  $MNP$ . Si le côté  $]UV[$  est parallèle à  $[MN]$ , les deux points  $U$  et  $V$  sont à la même distance de la droite  $(MN)$  que  $P$ . Alors le triangle  $MNV$  a une aire égale à celle de  $MNP$ . En remplaçant  $P$  par  $V$ , on obtient dans tous les cas un triangle d'aire au moins égale à celle de  $MNP$ . Il reste à pratiquer la même opération sur  $N$  et  $M$  pour établir le lemme.

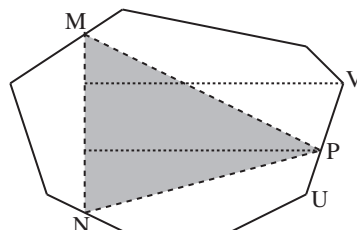


fig. 5

### Théorème 3

Parmi les triangles inclus dans un polygone convexe, il en existe un dont les trois sommets sont des sommets du polygone et dont l'aire est au moins égale à celle de tous les autres.

Il suffit pour le prouver de prendre parmi tous les triangles formés avec trois sommets du polygone (si ce dernier a  $n$  côtés, il y a donc  $\binom{n}{3}$  triangles à examiner)

et de prendre celui (ou l'un de ceux) dont l'aire est la plus grande. L'application des deux lemmes permet alors de conclure.

N.B. 1 : Nous avons donc trouvé un processus fini (pour ne pas dire un algorithme) permettant de déterminer l'aire maximale d'un triangle inclus dans un polygone convexe donné.

N.B. 2: Il peut exister des triangles inclus d'aire maximale dont les sommets ne soient pas tous des sommets du polygone.

En effet, sur la figure 6, le triangle  $AMB$  est d'aire maximale dans l'hexagone  $ABCDEF$  quelle que soit la position de  $M$  sur  $[DE]$ , car il est déjà d'aire maximale dans le rectangle  $ABHG$  (voir l'article précédent).

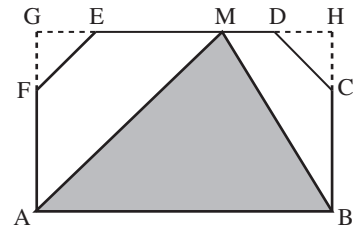


fig. 6

**Théorème 4**

Soit  $T$  un triangle d'aire maximale inclus dans un polygone convexe donné  $\Pi$  ; le triangle  $T'$  obtenu en menant par chaque sommet de  $T$  la parallèle au côté opposé contient  $\Pi$ .

Soient  $M, N, P$  les sommets de  $T$ ,  $M', N', P'$  les sommets de  $T'$ , les notations étant celles de la figure 7. Supposons qu'un point  $L$  de  $\Pi$  soit situé hors de  $T$ . Par rapport à au moins une des droites portant les côtés de  $T'$ , disons par exemple  $(M'N')$ , il est dans le demi-plan qui ne contient pas  $T$ . Donc sa distance à  $(MN)$  est strictement supérieure à celle de  $P$ , ce qui prouve que l'aire du triangle  $MNL$  est strictement supérieure à celle de  $T$ , ce qui contredit la définition de  $T$ .

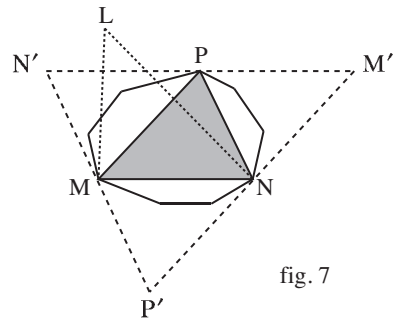


fig. 7

N.B. : L'aire de  $T$  est le quart de celle de  $T'$ , elle-même au moins égale à celle de  $\Pi$ , ce qui prouve que dans tout polygone convexe on peut inclure un triangle d'aire au moins égale au quart de la sienne. Nous allons montrer qu'on peut mieux faire, mais qu'on ne peut pas aller jusqu'à remplacer le facteur  $1/4$  par  $1/2$ .

**Théorème 5**

L'aire maximum des triangles inclus dans un polygone convexe est au moins égale aux  $3/8$  de l'aire de ce dernier.

Donnons-nous un polygone convexe  $\Pi$  d'aire  $S$ . Soit  $A$  le sommet le plus à gauche,  $B$  le sommet le plus à droite (l'un et l'autre pas forcément uniques).

$\Pi$  est inclus dans la bande définie par la verticale  $D$  de  $A$  et la verticale  $D'$  de  $B$ . La verticale  $\Delta$  équidistante de  $D$  et  $D'$  partage  $\Pi$  en deux morceaux. Supposons que celui de gauche soit le plus gros, c'est-à-dire que son aire  $s$  soit au moins égale à  $\frac{1}{2}S$ . La verticale  $\Delta'$  équidistante de  $D$  et  $\Delta$  coupe  $\Pi$  selon un segment  $[MN]$ . Le côté (ou l'un des deux côtés si  $M$  est un sommet) de  $\Pi$  passant par  $M$  coupe  $D$  en  $L$  et  $\Delta$  en  $K$  ; le côté (ou l'un des deux côtés si  $N$  est un

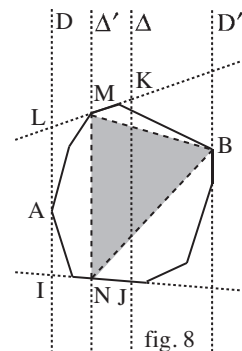


fig. 8

sommet) de  $\Pi$  passant par  $N$  coupe  $D$  en  $I$  et  $\Delta$  en  $J$ .

Appelons  $p$  la distance des deux droites  $D$  et  $\Delta$ . La moitié gauche de  $\Pi$  est incluse dans le trapèze  $IJKL$ , d'aire  $p MN$  (produit de la hauteur par la longueur du segment joignant les milieux des deux côtés obliques). On a donc  $s \leq p MN$  et *a fortiori*  $\frac{1}{2}S \leq p MN$ . Considérons alors le triangle  $MNB$ . Son aire est  $\frac{3}{4}p MN$  ; elle est donc

au moins égale à  $\frac{3}{8}S$ .

### Un contre-exemple

*Montrons maintenant que, dans un polygone convexe, on ne peut pas toujours inclure un triangle d'aire moitié.*

Soit un octogone régulier  $ABCDEFGH$ , d'aire  $S$ , inscrit dans un cercle de rayon  $R$ .

L'aire du triangle  $OAB$  est, avec les notations de la figure 9,  $\frac{1}{2}OA \times BJ$ , soit

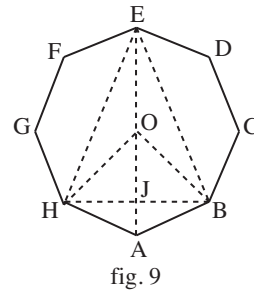
$$\frac{1}{2}R \times \frac{1}{\sqrt{2}}R. S \text{ vaut 8 fois l'aire de } OAB, \text{ donc } S = 2\sqrt{2}R^2.$$

Parmi les triangles d'aire maximum que contient l'octogone, il en est au moins un,  $T$ , dont les sommets sont pris parmi ceux de l'octogone.

Compte tenu des symétries, on peut supposer que le plus petit côté de  $T$  est  $[AB]$  ou  $[HB]$ . Si c'était  $[AB]$ , le troisième sommet serait  $E$  ou  $F$  ; or l'aire de  $ABE$  est

double de celle du triangle  $OAB$ , donc vaut  $\frac{1}{4}S$ ,

manifestement insuffisant. Il nous faut donc prendre comme base de  $T$  le segment  $[HB]$  et comme sommet opposé le point le plus éloigné, c'est-à-dire  $E$ . L'aire de  $T$  est donc, avec les notations de la figure 9 :



$$\sigma = \frac{1}{2}HB \times EJ = \frac{1}{2}R\sqrt{2} \times R \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \text{ soit } \sigma = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}R^2 \text{ ou encore } \sigma = \frac{1 + \sqrt{2}}{4\sqrt{2}}S,$$

c'est-à-dire environ  $0,427 S$ .

N.B. : Ce qui précède ne prouve pas pour autant que dans le théorème 5 on ne puisse pas remplacer  $3/8$  (c'est-à-dire  $0,375$ ) par un nombre compris entre  $0,375$  et  $0,427$ .

Le lecteur pourra démontrer<sup>(3)</sup>, en utilisant un  $3n$ -gone régulier et des valeurs de  $n$  arbitrairement grandes, que dans le théorème 5, le nombre  $0,375$  ne peut pas être

remplacé par un nombre plus grand que  $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ , soit environ  $0,4135$ . Mais cela laisse encore de la marge et j'ignore s'il est possible de mieux faire...

(3) Il suffit d'utiliser la propriété suivante : *parmi tous les triangles inscrits dans un cercle, les triangles équilatéraux sont ceux qui ont la plus grande aire.*

#### 4. Triangles contenant un polygone convexe

Nous avons réservé pour la fin le théorème qui suit. C'est le plus coriace, mais sa démonstration n'exige, comme celles des précédents, que les connaissances du lycée.

##### *Théorème 6*

*Pour tout polygone convexe, on peut trouver un triangle le contenant dont l'aire soit au plus égale au double de la sienne.*

Soit un polygone convexe  $\Pi$  d'aire  $S$  et soit  $m$  le maximum de l'aire des triangles inclus dans  $\Pi$ . Nous allons nous servir d'un triangle  $T$  d'aire  $m$  inclus dans  $\Pi$  et distinguer deux cas.

**Premier cas :**  $m \leq \frac{1}{2}S$

Considérons encore le triangle  $T'$  obtenu en menant par chaque sommet de  $T$  la parallèle au côté opposé (cf. figure 7). Il contient  $\Pi$  et son aire est  $4m$ , donc est au plus égale à  $2S$ , ce qui règle la question.

**Second cas :**  $m > \frac{1}{2}S$

Il est intuitif que, cette fois, les morceaux de  $\Pi$  débordant de  $T$  sont relativement « collés » contre  $T$ . Plutôt que de se servir du triangle  $T'$  précédent, il est plus intéressant d'utiliser un triangle  $T''$  dont les côtés soient parallèles à ceux de  $T$ . Pour comparer les aires de ces deux triangles, nous utiliserons un lemme, dont la démonstration constitue en elle-même un bel exercice sur l'homothétie.

##### *Lemme 3*

*Étant donné un triangle  $ABC$  et trois nombres positifs  $\lambda, \mu, \nu$ , on construit un triangle  $\alpha\beta\gamma$  comme suit :*

- la droite  $(\beta\gamma)$  est l'image de la droite  $(BC)$  dans l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $1 + \lambda$ ,
- la droite  $(\gamma\alpha)$  est l'image de la droite  $(CA)$  dans l'homothétie de centre  $B$  et de rapport  $1 + \mu$ ,
- la droite  $(\alpha\beta)$  est l'image de la droite  $(AB)$  dans l'homothétie de centre  $C$  et de rapport  $1 + \nu$ .

*Alors l'aire du triangle  $\alpha\beta\gamma$  est le produit de celle du triangle  $ABC$  par  $(1 + \lambda + \mu + \nu)^2$ .*

Avec les notations de la figure 10, nous avons les égalités  $FG = (1 + \lambda) BC$  ;  $DC = (1 + \nu) BC$  ;  $BE = (1 + \mu) BC$ .  $DBF\beta$  et  $ECG\gamma$  étant des parallélogrammes, on a  $\beta F = DB = \nu BC$  et  $G\gamma = CE = \mu BC$ .

Il en résulte  $\beta\gamma = \beta F + FG + G\gamma = (1 + \lambda + \mu + \nu) BC$ .

Compte tenu de la symétrie des données, il vient

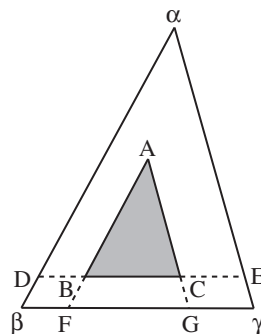


fig. 10

$$\frac{\beta\gamma}{BC} = \frac{\gamma\alpha}{CA} = \frac{\alpha\beta}{AB} = 1 + \lambda + \mu + \nu = k.$$

Le second triangle constitue donc un « agrandissement » du premier dans le rapport  $k$ , ce qui fait que son aire est le produit de l'aire de ABC par  $k^2$ .

### Fin de la démonstration du second cas

Reprenons notre polygone convexe  $\Pi$ , d'aire  $S$ , et soit  $T$  encore un triangle inclus dans  $\Pi$  d'aire maximale  $m$ , avec cette fois  $m > \frac{1}{2}S$ . Désignons par  $A, B, C$  les sommets de  $T$  et par  $\sigma$  son aire.

On mène la parallèle à  $(AB)$  située du côté opposé à  $C$  et passant par le sommet de  $\Pi$  le plus éloigné de  $(AB)$ . Par rapport à cette droite, le polygone est tout entier d'un même côté. En opérant ainsi à partir de chacun des côtés, on obtient un triangle  $T''$  contenant  $\Pi$ , dont nous désignerons l'aire par  $\Sigma$  et les sommets par  $\alpha, \beta, \gamma$  conformément à la figure 11. Chaque côté de  $T''$  contient (au moins) un sommet de  $\Pi$ , disons  $P, Q, R$  respectivement sur  $[\beta\gamma], [\gamma\alpha], [\alpha\beta]$ .

Il nous faut prouver que  $\Sigma \leq 2S$ .

Désignons par  $u, v, w$  les aires respectives des triangles  $BCP, CAQ, ABR$ . Le polygone  $ARBPCG$  étant inclus dans  $\Pi$ , nous avons  $m + u + v + w \leq S$ .

Posons  $\lambda = \frac{u}{m}, \mu = \frac{v}{m}, \nu = \frac{w}{m}$ . Avec les notations de la figure 11, nous avons :

$$\nu = \frac{\text{aire } ABR}{\text{aire } ABC} = \frac{RK}{CH} = \frac{HL}{CH}.$$

La droite  $(\alpha\beta)$  est l'image de la droite  $(AB)$  par l'homothétie de centre  $C$  et de rapport  $\frac{CL}{CH}$ , soit  $1 + \frac{HL}{CH}$ , autrement dit  $1 + \nu$ . En procédant de même pour les droites  $(\beta\gamma)$  et  $(\gamma\alpha)$ , on voit que les hypothèses du lemme 3 ci-dessus sont vérifiées. Il en résulte que l'aire de  $T''$  est le produit de celle de  $T$  par  $(1 + \lambda + \mu + \nu)^2$ . Elle vaut donc :

$$\Sigma = m(1 + \lambda + \mu + \nu)^2 = \frac{1}{m}(m + u + v + w)^2,$$

d'où  $\Sigma \leq \frac{1}{m}S^2$  et, comme  $m > \frac{1}{2}S$ , il vient  $\Sigma \leq 2S$ , ce qui est la réponse espérée.

### Remarque

On peut aisément vérifier que les théorèmes 1, 1 bis, 2, 4, 5 et 6 s'étendent à un compact convexe quelconque.

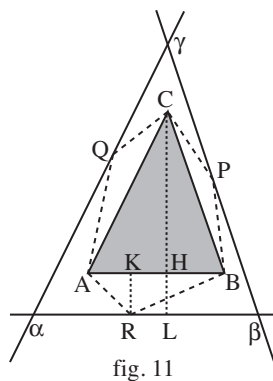


fig. 11