Voici la solution de Jean-Paul Thabaret.

Soit n un entier naturel non nul.

Posons $\alpha = \dfrac{\pi}{2n+1}$.

$\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)\alpha$ est la partie réelle de $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k-1)\alpha} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right)^k$.

Comme $\dfrac{1}{2n+1}$ n'est pas un entier, $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$ n'est pas égal à 1 ; donc

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right)^k = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} \frac{1-\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right)^n}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \frac{1-\mathrm{e}^{2in\alpha}}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \frac{\mathrm{e}^{in\alpha}\left(\mathrm{e}^{-in\alpha} - \mathrm{e}^{in\alpha}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)} = \mathrm{e}^{in\alpha} \frac{\sin n\alpha}{\sin \alpha}.$$

Alors

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)\alpha = \cos n\alpha \times \frac{\sin n\alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} \times \frac{\sin 2n\alpha}{\sin \alpha}.$$

Or $2n\alpha + \alpha = (2n+1)\alpha = \pi$, donc $\sin 2n\alpha = \sin\alpha$ et finalement

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)\frac{\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Nota. Outre cette solution, Michel Sarrouy en propose deux autres. Son document est disponible sur le site de l'association.